Yozgat Bozok Üniversitesi
Matematik Bölümü Genel Seminerleri 121

Farklı Aritmetiklerle Analiz ve Geometrinin İnşası

Dr. Öğr. Üyesi Aykut Has

KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

Bölüm 1: Nevtonyen Olmayan Analizlerin Tarihi 1

1.1 Aritmetik Temellerden Yüksek Matematiğe: Problemin Doğasına Uygun Matematik İnşası

Matematiksel düşüncenin gelişim süreci incelendiğinde; analiz, cebir, geometri ve topoloji gibi birbirinden bağımsız ve devasa görünen disiplinlerin, özünde oldukça yalın yapı taşları üzerine inşa edildiği görülür. Bu disiplinlerin tamamı, en alt katmanda **temel aritmetik işlemlere** dayanmaktadır. Matematiğin bu denli karmaşık soyutlamalara başvurmasının temel amacı ise aslında oldukça basittir: **Nicelikleri birbirleriyle karşılaştırmak, ölçmek ve aralarındaki değişim dinamiklerini anlamlandırmaktır.**

Bu hiyerarşik yapının doğal bir sonucu olarak, en alt katmandaki karşılaştırma ve ölçme araçlarında —yani temel aritmetikte— yapılacak aksiyomatik bir değişiklik, üzerinde yükselen tüm devasa matematiksel yapıları da temelden çatıya doğru köklü bir dönüşüme uğratır. Dolayısıyla matematiksel modellemede en sağlıklı ve verimli yaklaşım, incelenen problemin doğasını en baştan doğru teşhis etmek ve aritmetiksel temeli doğrudan bu problemin karakterine uygun olarak seçmektir.

Bu duruma en çarpıcı örnek, **klasik (Nevton–Leibniz) kalkülüs** ile **Nevtonyen olmayan (Non-Newtonian) kalkülüs** arasındaki yapısal farktır:

- **Toplamsal (Doğrusal) Perspektif:** Klasik analiz, değişimi **fark (çıkarma)** ve birikimi **toplama** işlemleri üzerinden tanımlar. Doğrusal (lineer) değişim süreçlerini ve sonsuz küçük farkları (dx) tespit etmekte olağanüstü bir başarı gösterir. Sabit hızla değişen veya toplamsal olarak büyüyen fiziksel olayların modellenmesinde en ideal araçtır.
- **Oransal (Üstel) Perspektif:** Nüfus dinamiği, radyoaktif bozunma, bileşik faiz veya fraktal büyüme gibi doğası gereği üstel veya geometrik değişen süreçlerde, değişimi "fark" işlemiyle açıklamaya çalışmak problemi kendi doğasına yabancı bir kalıba zorlamaktır. Bu tür problemlerde iki durum arasındaki farktan ziyade **oran (bölme)** ve **kat (çarpma)** ilişkisi belirleyicidir. Değişimi fark yerine oran üzerinden tanımlayan çarpımsal (geometrik) veya bigeometrik analiz yaklaşımları, üstel süreçleri kendi doğal uzaylarında doğrusal (lineer) bir sadeliğe indirgeyerek çok daha zarif çözümler sunar.

Sonuç olarak; her matematiksel problemi standart toplamsal aritmetiğin ve klasik analizin kalıplarına sıkıştırmak yerine, problemin içsel karakterine özgü bir aritmetik ve analiz yapısı inşa etmek metodolojik açıdan çok daha güçlü bir yaklaşımdır. Problemi kendi doğal uzayında ve kendi değişim dilinde (toplamsal, çarpımsal veya daha genel bir üreteç fonksiyonu altında) incelemek, hem karmaşık görünen denklemleri sadeleştirir hem de incelenen olgunun yapısal özünü çok daha berrak bir şekilde ortaya koyar.

1.2 Grossman–Katz Devrimi ve Aritmetik Özgürlüğü

Doğadaki süreçlerin oransal karakteri, matematikçileri analizin temellerine dair derin ve sarsıcı bir soruyla yüzleştirmiştir: *"Değişimi farklar yerine oranlar üzerinden inceleseydik, nasıl bir matematiksel analiz ve geometri dünyası elde ederdik?"*

Michael Grossman ve Robert Katz (1972, *Nevtonyen Olmayan Kalkülüs*), analizin üzerine kurulduğu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ klasik reel sayılar aritmetiğinin **tek ve mutlak bir zorunluluk olmadığını** ortaya koymuştur. Tıpkı Öklid'in beşinci paralellik aksiyomunun esnetilmesiyle hiperbolik ve eliptik geometrilerin doğması gibi, reel sayılar cisminin cebirsel işlemlerinin değiştirilmesiyle de **sonsuz sayıda bağımsız kalkülüs sistemi** inşa edilebilir:

- **Yapı Taşıma İlkesi (α-Aritmetiği):** Seçilen bir $\alpha : \mathbb{R} \to A$ üreteç bijeksiyonu ile toplama $(+_\alpha)$, çıkarma $(-_\alpha)$, çarpma $(\times_\alpha)$ ve bölme $(/_\alpha)$ işlemleri

$$x +_\alpha y = \alpha\big(\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y)\big), \qquad x -_\alpha y = \alpha\big(\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y)\big), \qquad x \times_\alpha y = \alpha\big(\alpha^{-1}(x)\,\alpha^{-1}(y)\big), \qquad x /_\alpha y = \alpha\big(\alpha^{-1}(x)/\alpha^{-1}(y)\big)$$

  biçiminde yeniden inşa edilir ve $(A, +_\alpha, \times_\alpha)$ yapısı tam sıralı bir cisim oluşturur.
- **Sonsuz Kalkülüs Ailesi:** (α, β) üreteç çiftleriyle bu aritmetik üzerinde limit, süreklilik, türev ve integral tanımlanarak Geometrik, Bigeometrik, Kuadratik ve Harmonik kalkülüsler dahil sonsuz sayıda tam ve tutarlı analiz sistemi doğar.

Değişimin Doğal Dili ve Çarpımsal Türev: Klasik kalkülüs ile çarpımsal kalkülüs arasındaki fark, üstel süreçlerin türevlenmesinde doğrudan ortaya çıkar:

- **Klasik Analizde Üstel Süreç:** $f(x) = c\,e^{kx}$ fonksiyonunun klasik türevi $f'(x) = k\,c\,e^{kx}$ olup her noktada değişir.
- **Çarpımsal Analizde Doğrusallaşma:** Aynı fonksiyonun çarpımsal türevi alındığında

$$f^*(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)}{f(x)}\right)^{1/h} = e^{f'(x)/f(x)} = e^k = \text{sabit!}$$

  Üstel büyüme yasası, çarpımsal analizde tıpkı doğrular gibi **sabit eğimli (doğrusal)** hale gelir. Pozitif reel eksen üzerinde $(\mathbb{R}_*, +_*, \times_*)$ cismi ve $\mathbb{E}_*^n$ çarpımsal Öklid uzayı kurulduğunda analitik ve diferansiyel geometri de çarpımsal zeminde yeniden doğar.

1.3 Toplamsal ve Çarpımsal Karşılaştırma: Mutlak Fark mı, Göreli Oran mı?

Toplamsal karşılaştırma (mutlak fark) ile çarpımsal karşılaştırmanın (göreli oran) değişimi nasıl farklı yorumladığını ve bu ayrımın geometri ile analizdeki aksiyomatik karşılığını üç temel boyutta inceleyelim:

- **1. Ölçek Etkisi ($2 \to 12$ Değişimi ile $1000 \to 1010$ Değişimi):** Bir A niceliğinin 2 değerinden 12 değerine, bir B niceliğinin ise 1000 değerinden 1010 değerine çıktığını düşünelim:

  Toplamsal Fark: $\Delta A = 12 - 2 = 10, \quad \Delta B = 1010 - 1000 = 10$ | **Çarpımsal Oran:** $\frac{12}{2} = 6$ kat, $\quad \frac{1010}{1000} = 1{,}01$ kat.

  Mutlak fark ölçümü her iki değişime de aynı sayıyı (10) verirken; göreli oran ölçümü A'nın 6 **katına**, B'nin ise yalnızca 1,01 **katına** çıktığını göstererek değişimin gerçek büyüklüğünü ayırt eder.

- **2. Sabit Oranlı Süreçte Değişim Yasasını Yakalamak ($f(x) = 3^x$):** $x = 0,1,2,3$ noktalarında $f(x) = 3^x$ fonksiyonunun aldığı 1, 3, 9, 27 değerlerinin ardışık adımlardaki değişimi:

  Klasik Farklar: $3 - 1 = 2, \quad 9 - 3 = 6, \quad 27 - 9 = 18$ | **Çarpımsal Oranlar:** $\frac{3}{1} = 3, \quad \frac{9}{3} = 3, \quad \frac{27}{9} = 3.$

  Klasik fark her adımda değişirken $(2,6,18)$, çarpımsal oran ölçümü fonksiyonun her adımda **sabit** 3 **katına** çıktığını tek bir değişmez sayıyla yakalar.

- **3. Öklid Dışı Geometrilerden Nevtonyen Olmayan Analizlere Aksiyomatik Paralellik:** Lobachevsky, Bolyai ve Riemann'ın 5. paralellik aksiyomunu değiştirerek eğri yüzeyler için Öklid dışı geometrileri kurması gibi; Grossman ve Katz (1972) da aritmetiği değiştirerek üstel ve kuvvet süreçlerini **sabit türevli (doğrusal)** hale getiren Nevtonyen olmayan analizleri inşa etmiştir:

  Klasik ($\alpha = I$): $f(x) = mx + n \implies f'(x) = m,$ **Geometrik ($\beta = \exp$):** $f(x) = c\,a^x \implies [\tilde{D}f](x) = a,$ **Bigeometrik ($\alpha = \beta = \exp$):** $f(x) = c$

- **I. Klasik (Nevton–Leibniz) Kalkülüsün Kuruluşu ve Toplamsal Paradigma (1665–1854):** Isaac Nevton (1671, 1687) ve Gottfried Wilhelm Leibniz (1684) ile kurulan, Augustin-Louis Cauchy (1821) ve Bernhard Riemann (1854) ile kesin limit temeline oturan klasik analiz, iki asır boyunca değişimi yalnızca **sonsuz küçük farkların oranı** ve **Riemann toplamlarının limiti** olarak tanımladı:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}, \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

- **II. Vito Volterra ve Çarpımsal (Ürün) İntegrallerin Doğuşu (1887–1960):** Çarpımsal analizin matematik tarihindeki ilk somut adımı 1887 yılında İtalyan matematikçi **Vito Volterra** (1860–1940) tarafından atıldı. Volterra, değişken katsayılı $Y'(t) = A(t)Y(t)$ matris diferansiyel denklem sistemlerinin temel çözüm matrisini ararken matris çarpımının değişmeli olmaması ($A(t_1)A(t_2) \neq A(t_2)A(t_1)$) nedeniyle Riemann toplamındaki $\sum$ toplamı yerine $\prod$ çarpımını yerleştirerek **Volterra ürün integralini** inşa etti (Schlesinger 1908, Rasch 1934, Masani 1947):

$$\prod_a^b (I + A(t)\,\mathrm{d}t) = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \prod_{i=1}^{n} (I + A(\xi_i)\,\Delta t_i) = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \prod_{i=1}^{n} \exp(A(\xi_i)\,\Delta t_i).$$

- **III. Grossman ve Katz Devrimi — Nevtonyen Olmayan Kalkülüs Ailesinin İnşası (1967–1972):** **Michael Grossman** ve **Robert Katz**, 1972 yılında yayımladıkları *Nevtonyen Olmayan Kalkülüs* monografisinde keyfi bir $\alpha : \mathbb{R} \to A$ bijeksiyonunun ürettiği α-aritmetiği ve (α, β) üreteç çiftiyle **sonsuz sayıda bağımsız kalkülüs** (Geometrik, Anageometrik, Bigeometrik, Kuadratik, Harmonik vb.) tanımladılar:

$$[D^* f](a) = \lim_{x \to a} \beta\left(\frac{\beta^{-1}(f(x)) - \beta^{-1}(f(a))}{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(a)}\right) = \beta\left(\frac{\alpha'(\alpha^{-1}(a))}{\beta'(\beta^{-1}(f(a)))}\, f'(a)\right), \qquad \int_a^{*b} f(x)\,\mathrm{d}^* x = \beta\left(\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} \beta^{-1}(f(\alpha(t)))\,\mathrm{d}t\right).$$

- **IV. Bigeometrik Kalkülüs ve Ölçekten Bağımsız Türev Monografisi (Grossman, 1983):** **Michael Grossman** (1983, *Bigeometrik Kalkülüs*), hem argüman hem değer uzayında üstel üretecin ($\alpha = \exp$, $\beta = \exp$) kullanıldığı bigeometrik kalkülüsü inceledi ve birim/ölçek dönüşümleri ($x \mapsto px$, $f \mapsto qf$) altında değişmeyen **ölçekten bağımsız türevi** ortaya koydu:

$$[\widetilde{D}\, f](a) = f^*(a) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{\ln(x/a)}} = \lim_{h \to 1} \left(\frac{f(ah)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{\ln h}} = \exp\left(\frac{a\, f'(a)}{f(a)}\right).$$

- **V. Modern Çarpımsal Analizin Yeniden Doğuşu ve Uygulamalı Analiz Dönemi (2000–2020):** Yirmi birinci yüzyılın başında **Agamirza E. Bashirov, Emine Mısırlı Kurpınar ve Mustafa Rıza** (2008, *Çarpımsal Kalkülüs ve Uygulamaları*) tarafından yayımlanan temel makale, çarpımsal analize uluslararası literatürde büyük bir ivme kazandırdı. Bu dönemde çarpımsal ortalama değer teoremleri, çarpımsal Taylor açılımı, çarpımsal adi ve kısmi diferansiyel denklemler, kesirli çarpımsal türevler ve pozitiflik koruyan çarpımsal Runge–Kutta sayısal yöntemleri geliştirildi:

$$f(x_0+h)=\prod_{k=0}^{\infty}\Big(\big[\tilde{D}^{(k)}f\big](x_0)\Big)^{\frac{h^k}{k!}},\qquad (f\times_* g)^*(x)=f^*(x)\times_* g(x)+_* f(x)\times_* g^*(x).$$

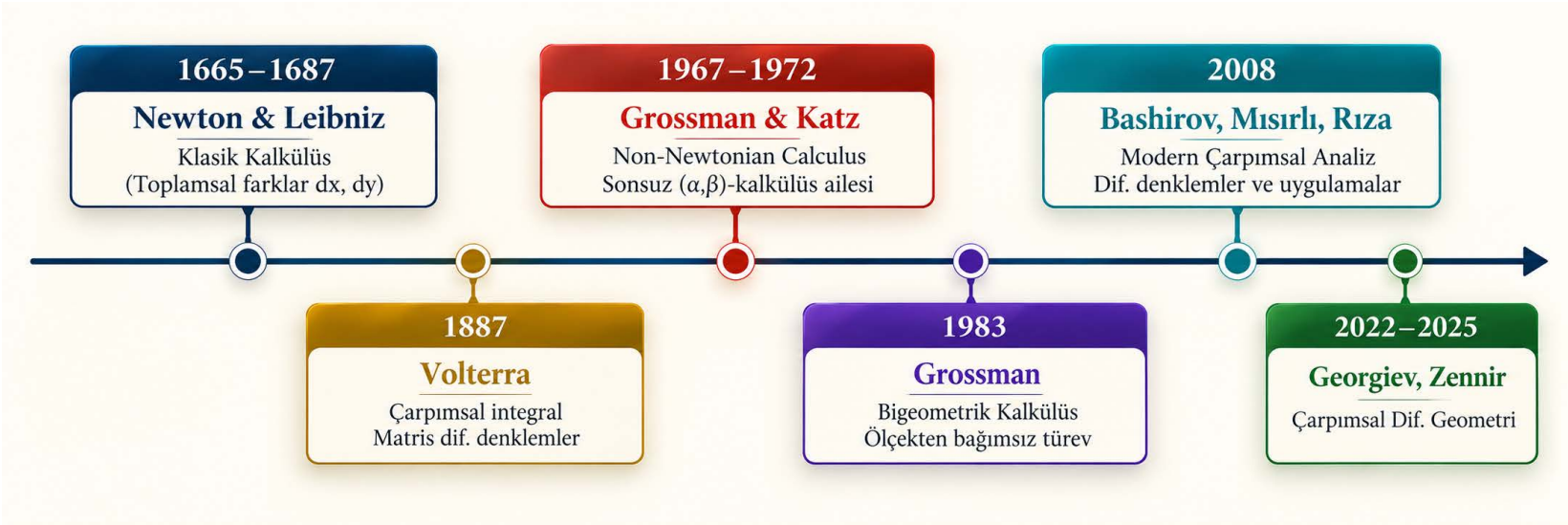
- **VI. Çarpımsal Analitik ve Diferansiyel Geometrinin Kurumsallaşması (Georgiev, Zennir ve Boukarou, 2022–2023):** **Svetlin G. Georgiev**, **Khaled Zennir** ve **Aissa Boukarou** (2022–2023), *Çarpımsal Diferansiyel Geometri*, *Çarpımsal Diferansiyel Kalkülüs* ve *Çarpımsal Analitik Geometri* adlı üç ciltlik kapsamlı monografi serisiyle pozitif reel sayılar kümesi $\mathbb{R}_*=(0,\infty)$ üzerindeki $(\mathbb{R}_*,+_*,\times_*)$ çarpımsal cismini ve $\mathbb{E}_*^n=((0,\infty)^n,\langle\cdot,\cdot\rangle_*)$ çarpımsal Öklid uzayını aksiyomatik olarak kurarak analitik ve diferansiyel geometriyi çarpımsal zemine taşıdı:

$$a+_* b=ab,\qquad a\times_* b=e^{\ln a\ln b}=a^{\ln b},\qquad \langle u,v\rangle_*=e^{\langle \ln u,\ln v\rangle},\qquad d_*(u,v)=\|u-_* v\|_*=e^{\|\ln(u/v)\|}.$$

- **VII. Çarpımsal Konikler, Helis Hiyerarşisi ve Doğrultucu Altmanifoldlar Kuramı (Dr. Aykut Has, 2025):** **Dr. Aykut Has** (2025, *Çarpımsal Analizde Geometrik Yaklaşımlar*, Doktora Tezi; danışmanlar: Doç. Dr. Beyhan Yılmaz ve Prof. Dr. Muhittin Evren Aydın), çarpımsal geometri literatürüne üç ana eksende özgün teoremler kazandırdı: (1) $\mathbb{E}_*^2$ düzleminde genel ikinci derece çarpımsal koniklerin $\Delta_*=B^{2_*}-_* e^4\times_* A\times_* C$ diskriminantıyla sınıflandırılması; (2) $\mathbb{E}_*^3$ uzayında küresel göstergeler (t,n,b), helis hiyerarşisi (genel, eğik ve örtülü helisler) ve Bertrand, Mannheim, involüt–evolüt eğri çiftleri; (3) $\mathbb{E}_*^m$ uzayında çarpımsal doğrultucu eğriler ve doğrultucu altmanifoldların karakterizasyonu:

$$t^*(s)=\kappa(s)\times_* n(s),\qquad n^*(s)=-_*\kappa(s)\times_* t(s)+_*\tau(s)\times_* b(s),\qquad b^*(s)=-_*\tau(s)\times_* n(s),\qquad \nabla^*_X F^{T_*}=X.$$

1.6 Nevtonyen Olmayan ve Çarpımsal Analizin Tarihsel Zaman Çizelgesi



Şekil 1.1. Nevtonyen olmayan ve çarpımsal analiz kuramının 1687 yılından 2025 yılına uzanan 340 yıllık altı ana gelişim evresi.

Zaman Çizelgesinin Matematiksel Özeti — Altı Temel Dönüm Noktası

- **1. Klasik Kalkülüs (1687):** Nevton ve Leibniz ile toplamsal farklar $(\Delta y/\Delta x)$ ve Riemann toplamları dönemi.
- **2. Volterra Ürün İntegrali (1887):** Matris diferansiyel denklemleri için $\sum$ yerine $\prod$ çarpım integralinin kuruluşu.
- **3. Nevtonyen Olmayan Devrim (1972):** Grossman ve Katz'ın (α, β) üreteçleriyle sonsuz kalkülüs ailesini inşa etmesi.
- **4. Modern Çarpımsal Analiz (2008):** Bashirov, Mısırlı ve Rıza ile diferansiyel denklemler ve uygulamalı analiz atılımı.
- **5. Çarpımsal Geometri (2022):** Georgiev, Zennir ve Boukarou'nun üç ciltlik analitik ve diferansiyel geometri serisi.
- **6. Konikler ve Altmanifoldlar (2025):** Dr. Aykut Has tarafından $\mathbb{E}^n_*$ uzayında konikler, helis hiyerarşisi ve doğrultucu manifold kuramı.

2.1 Üreteç Fonksiyonu ve α-Sayı Kümesinin İnşası

Klasik analiz $\mathbb{R}$ üzerindeki standart toplama ve çarpma işlemleri üzerine kuruludur. Yeni bir analiz sistemi inşa ederken ilk adım, sayı kümesini ve dört temel işlemi yeniden tanımlamaktır. Grossman ve Katz (1972), her yeni aritmetiğin klasik $\mathbb{R}$ cisminden bir **üreteç fonksiyonu** (α) yardımıyla üretilebileceğini göstermiştir.

Tanım 2.1. *(Üreteç fonksiyonu ve α-sayı kümesi)*
Tanım kümesi $\mathbb{R}$ ve görüntü kümesi $A \subseteq \mathbb{R}$ olan birebir ve örten $\alpha : \mathbb{R} \to A,\ x \mapsto y = \alpha(x)$ dönüşümüne **üreteç fonksiyonu**, $\mathbb{R}_\alpha = A = \alpha(\mathbb{R})$ kümesine **α-sayı sistemi** denir. Tersi $\alpha^{-1} : A \to \mathbb{R}$ tek olarak tanımlıdır:

$$\alpha\big(\alpha^{-1}(y)\big) = y \quad (\forall y \in A), \qquad \alpha^{-1}\big(\alpha(x)\big) = x \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

- **Birebirlik ve Örtenlik Şartı:** α'nın birebir olması A kümesinde farklı elemanların çakışmasını önler; örten olması ise A'daki her elemanın klasik $\mathbb{R}$'de tek bir karşılığı $(x = \alpha^{-1}(y))$ bulunmasını garanti eder.
- **Analitik Düzenlilik:** İleri analiz ve diferansiyel geometri inşa edilirken α'nın pürüzsüz (türevlenebilir) ve kesin monoton $(\alpha'(x) \neq 0)$ bir bijeksiyon olması istenir.
- **Kodlama ve Çözme Köprüsü Olarak α:** Üreteç fonksiyonu α, klasik $\mathbb{R}$ ile yeni sayı evreni $A = \mathbb{R}_\alpha$ arasında çift yönlü izomorfik tercümandır: α klasik $x \in \mathbb{R}$ sayısını A'da **kodlar**; α^{-1} ise A'daki y elemanını klasik $\mathbb{R}$'ye **çözer**:

$$\mathbb{R} \underset{\alpha^{-1}\ \text{(klasik dünyaya çekme)}}{\overset{\alpha\ (\alpha\text{-uzayına taşıma})}{\rightleftarrows}} A = \mathbb{R}_\alpha.$$

2.2 Genel α-Aritmetiği: α-İşlemler ve Birim Elemanların İnşası

Bir $\alpha : \mathbb{R} \to A$ üreteç fonksiyonu seçildiğinde, $A = \mathbb{R}_\alpha$ üzerindeki cebirsel işlemler **yapı taşıma prensibiyle** tanımlanır:

Tanım 2.2. *(α-Aritmetiğinde dört temel işlem ve α-kuvvet)*

$\alpha : \mathbb{R} \to A$ bir üreteç fonksiyonu olmak üzere her $y, z \in A$ için α-aritmetiğinin dört temel işlemi

$$\textbf{α-Toplama:}\quad y +_\alpha z = \alpha\big(\alpha^{-1}(y) + \alpha^{-1}(z)\big), \qquad \textbf{α-Çıkarma:}\quad y -_\alpha z = \alpha\big(\alpha^{-1}(y) - \alpha^{-1}(z)\big),$$

$$\textbf{α-Çarpma:}\quad y \times_\alpha z = \alpha\big(\alpha^{-1}(y) \cdot \alpha^{-1}(z)\big), \qquad \textbf{α-Bölme:}\quad y /_\alpha z = \alpha\left(\frac{\alpha^{-1}(y)}{\alpha^{-1}(z)}\right) \quad (z \neq 0_\alpha)$$

kurallarıyla; bir $y \in A$ elemanının $p \in \mathbb{R}$ mertebeden α-kuvveti ise $y^{p_\alpha} = \alpha\big((\alpha^{-1}(y))^p\big)$ bağıntısıyla tanımlanır.

Teorem 2.3. *(α-Aritmetiğinde birim elemanlar, ters elemanlar ve cisim yapısı)*

Her α-aritmetiği $(A, +_\alpha, \times_\alpha)$, klasik reel sayılar cismi $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ile α bijeksiyonu altında izomorfik olan bir **cisimdir**. Bu cismin toplamsal ve çarpımsal birim (etkisiz) elemanları ile ters elemanları aşağıdaki gibidir:

1. α-Sıfır (Toplamsal Birim): $0_\alpha = \alpha(0) \implies y +_\alpha 0_\alpha = y,$

2. α-Birim (Çarpımsal Birim): $1_\alpha = \alpha(1) \implies y \times_\alpha 1_\alpha = y,$

3. α-Simetrik (Toplamsal Ters): $-_\alpha y = \alpha(-\alpha^{-1}(y)) \implies y +_\alpha (-_\alpha y) = 0_\alpha,$

4. α-Çarpımsal Ters ($y \neq 0_\alpha$): $y^{-1_\alpha} = \alpha\left(\dfrac{1}{\alpha^{-1}(y)}\right) \implies y \times_\alpha y^{-1_\alpha} = 1_\alpha.$

Önerme 2.4. *(Seçilen Temel Üreteçlere Göre α-Sayı Kümeleri)*

Bir $\alpha : \mathbb{R} \to A$ üreteç fonksiyonunun görüntü kümesi $A = \mathbb{R}_\alpha = \alpha(\mathbb{R})$ olup, temel üreteç seçimlerine karşılık gelen α-sayı sistemleri:

1. Birim Üreteç ($\alpha = x$): $A = \mathbb{R}_I = (-\infty, \infty) = \mathbb{R},$

2. Üstel Üreteç ($\alpha = e^x$): $A = \mathbb{R}_* = (0, \infty) = \mathbb{R}^+,$

3. Kuadratik ($\alpha = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}$): $A = \mathbb{R}_q = (-\infty, \infty) = \mathbb{R},$

4. Harmonik Üreteç ($\alpha = 1/x$): $A = \mathbb{R}_h = \mathbb{R} \setminus \{0\},$

5. Ötelenmiş Üreteç ($\alpha = x + 1$): $A = \mathbb{R}_{x+1} = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$

Önerme 2.5. *(1. Birim Üreteç Seçimi ($\alpha = I$) — Klasik Aritmetik)*

Üreteç fonksiyonu olarak **birim (özdeşlik) fonksiyon**

$$\alpha(x) = I(x) = x, \qquad \alpha^{-1}(y) = I^{-1}(y) = y$$

seçildiğinde, α-sayı kümesi $A = \mathbb{R}_I = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ olur. Dört temel işlem:

$$\begin{aligned} y +_I z &= I\big(I^{-1}(y) + I^{-1}(z)\big) = y + z, \\ y -_I z &= I\big(I^{-1}(y) - I^{-1}(z)\big) = y - z, \\ y \times_I z &= I\big(I^{-1}(y) \cdot I^{-1}(z)\big) = y \cdot z, \\ y /_I z &= I\big(I^{-1}(y) / I^{-1}(z)\big) = \frac{y}{z} \quad (z \neq 0) \end{aligned}$$

ve birim elemanlar ile ters elemanlar

$$0_I = 0, \qquad 1_I = 1, \qquad -_I y = -y, \qquad y^{-1_I} = \frac{1}{y}$$

olarak doğrudan **klasik aritmetiği** verir.

Önerme 2.6. *(2. Üstel Üreteç Seçimi ($\alpha = \exp$) — Çarpımsal Aritmetik)*

Üreteç fonksiyonu olarak **doğal üstel fonksiyon**

$$\alpha(x) = \exp(x) = e^x, \qquad \alpha^{-1}(y) = \ln y \quad (y > 0)$$

seçildiğinde, α-sayı kümesi $\mathbb{R}_* = (0, +\infty)$ olur. Her $y, z \in \mathbb{R}_*$ için üretilen çarpımsal işlemler ($*$ indisiyle):

$$\begin{aligned} \textbf{Çarpımsal Toplama:} \quad & y +_* z = e^{\ln y + \ln z} = y \cdot z, \\ \textbf{Çarpımsal Çıkarma:} \quad & y -_* z = e^{\ln y - \ln z} = \frac{y}{z}, \\ \textbf{Çarpımsal Çarpma:} \quad & y \times_* z = e^{\ln y \cdot \ln z} = y^{\ln z} = z^{\ln y}, \\ \textbf{Çarpımsal Bölme:} \quad & y /_* z = e^{\frac{\ln y}{\ln z}} = y^{\frac{1}{\ln z}} \quad (z \neq 1). \end{aligned}$$

Çarpımsal birim elemanlar ve ters elemanlar:

$$0_* = e^0 = 1, \quad 1_* = e^1 = e, \quad -_* y = \frac{1}{y}, \quad y^{-1_*} = e^{\frac{1}{\ln y}}.$$

- **Klasik Yapının Yeri:** Birim üreteç $\alpha(x) = x$ seçimi, klasik reel sayılar aritmetiğinin $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, /)$ sonsuz Nevtonyen olmayan α-aritmetikleri ailesinin en temel özel üyesi olduğunu gösterir.
- **Çarpımsal Sıfır ($0_* = 1$) ve Çarpımsal Birim ($1_* = e$):** $\mathbb{R}_* = (0, \infty)$ kümesinde toplamsal birim $0_* = 1$ ($y +_* 1 = y \cdot 1 = y$), çarpımsal birim ise $1_* = e$ sayısıdır ($y \times_* e = y^{\ln e} = y$). Dolayısıyla çarpımsal bölmede paydası yasaklı olan eleman $0_* = 1$ sayısıdır ($\ln 1 = 0$)!

Örnek 2.7. *(Birim üreteç ($\alpha = I$) ile klasik aritmetik işlemleri)*
$\alpha(x) = I(x) = x$ üreteci altında $y = 6 \in \mathbb{R}$ ve $z = 2 \in \mathbb{R}$ sayıları için dört temel işlemi ve ters elemanları hesaplayınız.

Çözüm: $\alpha^{-1}(6) = 6$ ve $\alpha^{-1}(2) = 2$ olduğundan:

$$\begin{aligned} \textbf{Toplama:} \quad & 6 +_I 2 = I(6+2) = 8, \\ \textbf{Çıkarma:} \quad & 6 -_I 2 = I(6-2) = 4, \\ \textbf{Çarpma:} \quad & 6 \times_I 2 = I(6\cdot 2) = 12, \\ \textbf{Bölme:} \quad & 6 /_I 2 = I(6/2) = 3. \end{aligned}$$

Birim elemanlar $0_I = 0,\ 1_I = 1$ olup $y = 6$'nın tersleri:

$$-_I 6 = -6 \implies 6 +_I (-6) = 0 = 0_I,$$

$$6^{-1_I} = \frac{1}{6} \implies 6 \times_I \frac{1}{6} = 1 = 1_I.$$

◀

Örnek 2.8. *(Üstel üreteç ($\alpha = \exp$) ile çarpımsal aritmetik işlemleri)*
$\alpha(x) = e^x$ üreteci altında $\mathbb{R}_* = (0,\infty)$ kümesinde **(a)** $y = 8$, $z = 2$ ve **(b)** $y = e^6$, $z = e^2$ için çarpımsal işlemleri hesaplayınız.

Çözüm: **(a)** $y = 8$ ve $z = 2$ için çarpımsal işlemler:

$$8 +_* 2 = e^{\ln 8 + \ln 2} = 16, \qquad 8 -_* 2 = e^{\ln 8 - \ln 2} = 4,$$
$$8 \times_* 2 = e^{\ln 8 \cdot \ln 2} = 8^{\ln 2}, \qquad 8 /_* 2 = e^{\frac{\ln 8}{\ln 2}} = e^3.$$

$y = 8$ için tersler $(0_* = 1,\ 1_* = e)$: $-_* 8 = \frac{1}{8}$ ve $8^{-1_*} = e^{1/\ln 8}$.
(b) $y = e^6$, $z = e^2$ seçilirse $(\ln(e^6) = 6,\ \ln(e^2) = 2)$:

$$e^6 +_* e^2 = e^{6+2} = e^8, \qquad e^6 -_* e^2 = e^{6-2} = e^4,$$
$$e^6 \times_* e^2 = e^{6\cdot 2} = e^{12}, \qquad e^6 /_* e^2 = e^{6/2} = e^3.$$

◀

► **İzomorfizma Köprüsü:** Klasik örnekteki sonuçlar $(8, 4, 12, 3)$ ile çarpımsal örnekteki sonuçlar (e^8, e^4, e^{12}, e^3) karşılaştırıldığında $\alpha(u \star v) = \alpha(u) \star_* \alpha(v)$ izomorfizması açıkça görülür: klasik dünyada 6 ve 2 ile yapılan her işlem, üstel üreteç altında e^6 ve e^2'nin üslerinde birebir aynıyla gerçekleşir!

Önerme 2.9. *(3. Kuadratik Üreteç Seçimi — Kuadratik Aritmetik)*

Üreteç fonksiyonu olarak $\mathbb{R}$ üzerinde tek ve bijektif karekök dönüşümü

$$\alpha(x) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^{-1}(y) = \operatorname{sgn}(y)y^2$$

seçildiğinde α-sayı kümesi $\mathbb{R}_q = \mathbb{R}$ olur. Pozitif $y, z \geq 0$ için **kuadratik işlemler** (q indisiyle):

$$y +_q z = \sqrt{y^2 + z^2}, \qquad y -_q z = \sqrt{y^2 - z^2}\ (y \geq z),$$
$$y \times_q z = y \cdot z, \qquad y /_q z = \frac{y}{z}\ (z \neq 0).$$

Kuadratik birim elemanlar ve ters elemanlar:

$$0_q = 0, \qquad 1_q = 1, \qquad -_q y = -y, \qquad y^{-1_q} = \frac{1}{y}\ (y \neq 0).$$

Önerme 2.10. *(4. Harmonik Üreteç Seçimi — Harmonik Aritmetik)*

Üreteç fonksiyonu olarak çarpmaya göre ters alma dönüşümü

$$\alpha(x) = \frac{1}{x}\ \ (x \neq 0),\ \alpha(0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^{-1}(y) = \frac{1}{y}$$

seçildiğinde α-sayı kümesi $\mathbb{R}_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olur. Her $y, z \in \mathbb{R}_h$ için üretilen **harmonik işlemler** (h indisiyle):

$$y +_h z = \frac{yz}{y+z}, \qquad y -_h z = \frac{yz}{z-y}\ (z \neq y),$$
$$y \times_h z = y \cdot z, \qquad y /_h z = \frac{y}{z}\ (z \neq 0).$$

Harmonik birim elemanlar ve ters elemanlar:

$$0_h = 0, \qquad 1_h = 1, \qquad -_h y = -y, \qquad y^{-1_h} = \frac{1}{y}\ (y \neq 0).$$

- **Kuadratik Toplamanın Geometrik Karakteri:** $y +_q z = \sqrt{y^2 + z^2}$ işlemi, dik üçgende **Pisagor bağıntısının** (ℓ_2-normunun) ve ortogonal bileşenlerin bileşkesinin doğal cebirsel toplamıdır.
- **Harmonik Toplamanın Analitik Karakteri:** $y +_h z = \frac{yz}{y+z}$ işlemi, resiprokal uzaydaki doğrusal toplamın ($\frac{1}{y} + \frac{1}{z}$) harmonik uzaydaki karşılığıdır.

Örnek 2.11. *(Kuadratik aritmetikte dört işlem ve ters eleman hesabı)*
Kuadratik aritmetikte $y = 5 \in \mathbb{R}_q$ ve $z = 3 \in \mathbb{R}_q$ için dört temel işlemi ve ters elemanları hesaplayınız.

Çözüm: $\alpha^{-1}(5) = 25$ ve $\alpha^{-1}(3) = 9$ olup kuadratik işlem kurallarıyla:

$$5 +_q 3 = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}, \qquad 5 -_q 3 = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$
$$5 \times_q 3 = 5 \cdot 3 = 15, \qquad 5/_q 3 = \frac{5}{3}.$$

Toplamsal ters $-_q 5 = -5$, çarpımsal ters $5^{-1_q} = \frac{1}{5}$'tir:

$$5 +_q (-5) = \sqrt{25 - 25} = 0 = 0_q, \qquad 5 \times_q \frac{1}{5} = 1 = 1_q.$$

◀

Örnek 2.12. *(Harmonik aritmetikte dört işlem ve ters eleman hesabı)*
Harmonik aritmetikte $y = 6 \in \mathbb{R}_h$ ve $z = 3 \in \mathbb{R}_h$ için dört temel işlemi ve ters elemanları hesaplayınız.

Çözüm: $\alpha^{-1}(6) = \frac{1}{6}$ ve $\alpha^{-1}(3) = \frac{1}{3}$ olup harmonik işlem kurallarıyla:

$$6 +_h 3 = \frac{6 \cdot 3}{6 + 3} = 2, \qquad 6 -_h 3 = \frac{6 \cdot 3}{3 - 6} = -6,$$
$$6 \times_h 3 = \frac{1}{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}} = 18, \qquad 6/_h 3 = \frac{6}{3} = 2.$$

Toplamsal ters $-_h 6 = -6$, çarpımsal ters $6^{-1_h} = \frac{1}{6}$'dır:

$$6 +_h (-6) = \frac{1}{1/6 - 1/6} = 0_h, \qquad 6 \times_h \frac{1}{6} = 1 = 1_h.$$

◀

► **Harmonik Toplamada Küçülme ve Terslerin Farkı ($6 -_h 3 = -6$):** Klasik aritmetikte pozitif sayıların toplamı toplananlardan büyükken, harmonik aritmetikte $6 +_h 3 = 2$ örneğinde görüldüğü gibi **toplam her iki sayıdan da küçüktür**. $6 -_h 3$ işleminde ise $\alpha^{-1}(6) - \alpha^{-1}(3) = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$ olup tersi alındığında sonuç -6 çıkar!

Önerme 2.13. *(5. Ötelenmiş (Afin) Üreteç Seçimi — Ötelenmiş Aritmetik)*

Üreteç fonksiyonu olarak $\mathbb{R}$ üzerinde birebir ve örten öteleme dönüşümü

$$\alpha(x) = x + 1, \qquad \alpha^{-1}(y) = y - 1 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

seçildiğinde α-sayı kümesi $\mathbb{R}_\alpha = \mathbb{R}$ olur. Her $y, z \in \mathbb{R}$ için üretilen **ötelenmiş aritmetik işlemleri**:

$$\begin{aligned}
\textbf{α-Toplama:} \quad & y +_\alpha z = \alpha\big((y-1)+(z-1)\big) = y + z - 1, \\
\textbf{α-Çıkarma:} \quad & y -_\alpha z = \alpha\big((y-1)-(z-1)\big) = y - z + 1, \\
\textbf{α-Çarpma:} \quad & y \times_\alpha z = \alpha\big((y-1)(z-1)\big) = yz - y - z + 2, \\
\textbf{α-Bölme:} \quad & y /_\alpha z = \alpha\left(\frac{y-1}{z-1}\right) = \frac{y+z-2}{z-1} \quad (z \neq 1).
\end{aligned}$$

Bu cismin birim elemanları ve ters elemanları:

$$0_\alpha = 1, \qquad 1_\alpha = 2, \qquad -_\alpha y = 2 - y, \qquad y^{-1_\alpha} = \frac{y}{y-1} \ (y \neq 1).$$

Örnek 2.14. *(Ötelenmiş aritmetikte dört işlem ve birim/ters eleman hesabı)*

$\alpha(x) = x + 1$ üreteciyle tanımlanan aritmetikte $y = 5 \in \mathbb{R}$ ve $z = 3 \in \mathbb{R}$ için dört temel işlemi ve $y = 5$'in ters elemanlarını hesaplayınız.

Çözüm: $\alpha^{-1}(5) = 4$ ve $\alpha^{-1}(3) = 2$ olduğundan:

$$\begin{aligned}
\textbf{α-Toplama:} \quad & 5 +_\alpha 3 = 5 + 3 - 1 = 7, \\
\textbf{α-Çıkarma:} \quad & 5 -_\alpha 3 = 5 - 3 + 1 = 3, \\
\textbf{α-Çarpma:} \quad & 5 \times_\alpha 3 = 5 \cdot 3 - 5 - 3 + 2 = 9, \\
\textbf{α-Bölme:} \quad & 5 /_\alpha 3 = \frac{5-1}{3-1} + 1 = 3.
\end{aligned}$$

Birim elemanlar $0_\alpha = 1$, $1_\alpha = 2$: $5 +_\alpha 1 = 5$ ve $5 \times_\alpha 2 = 5$. $y = 5$ için $-_\alpha 5 = -3$ ve $5^{-1_\alpha} = \frac{5}{4}$:

$$5 +_\alpha (-3) = 1 = 0_\alpha, \qquad 5 \times_\alpha \frac{5}{4} = 2 = 1_\alpha.$$

◀

► **Soyut Cebirdeki Cisim Problemlerinin Nevtonyen Olmayan Yorumu:** Soyut cebirde sıklıkla karşılaşılan "$\mathbb{R}$ üzerinde $y +_\alpha z = y + z - 1$ ve $y \times_\alpha z = yz - y - z + 2$ işlemleriyle tanımlanan $(\mathbb{R}, +_\alpha, \times_\alpha)$ yapısının bir cisim olduğunu gösteriniz" sorusu, doğrudan $\alpha(x) = x + 1$ üreteç fonksiyonuyla üretilen Nevtonyen olmayan α-aritmetiğidir!

Örnek 2.15. *(Karşı Örnek — $f(x) = x^2$ fonksiyonu neden üreteç olamaz?)*
Tanım kümesi $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ve görüntü kümesi $A = [0, \infty)$ olan $f(x) = x^2$ fonksiyonunun neden bir üreteç fonksiyonu olamayacağını $y = 4 \in A$ ve $z = 9 \in A$ sayıları üzerinde gösteriniz.

Çözüm: **1. Ters Dönüşümün Tek Değerli Olmaması:** $f(x) = x^2$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde birebir değildir:

$$f(\pm 2) = 4 \implies f^{-1}(\{4\}) = \{-2, +2\}, \qquad f(\pm 3) = 9 \implies f^{-1}(\{9\}) = \{-3, +3\}.$$

2. İşlemlerin İyi Tanımlılığının Çökmesi: $y = 4$ ve $z = 9$ sayılarını $y +_f z = f\big(f^{-1}(y) + f^{-1}(z)\big)$ kuralıyla toplamaya çalıştığımızda, ters görüntü seçimine göre **farklı sonuçlar** ortaya çıkar:

$$4 +_f 9 = \big(\pm 2 + (\pm 3)\big)^2 = \begin{cases} (2+3)^2 = 25, & (+2 \text{ ve } +3 \text{ seçilirse}), \\ (2-3)^2 = 1, & (+2 \text{ ve } -3 \text{ seçilirse}). \end{cases}$$

Aynı iki sayının toplamı hem 25 hem 1 olamayacağından $+_f$ işlemi **iyi tanımlı bir ikili işlem değildir**! ◀

Üreteç Olabilmenin İki Temel Kriteri

- **1. Cebirsel Engel (Birebirlik Şartı):** Çift kuvvet fonksiyonları $(f(x) = x^2, x^4)$, periyodik trigonometrik fonksiyonlar $(f(x) = \sin x, \cos x)$ veya yerel ekstremumu olan polinomlar $(f(x) = x^3 - 3x)$ $\mathbb{R}$ üzerinde birebir olmadığından $f^{-1}(y)$ tek olarak tanımlanamaz ve dört işlem çöker:
$$\sin(0) = \sin(\pi) = 0 \implies \sin^{-1}(0) \text{ çok değerlidir!}$$
- **2. Analitik Engel ($\alpha'(x) \neq 0$ Şartı):** $f(x) = x^3$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde birebir ve örtendir; dolayısıyla cebirsel olarak geçerli bir aritmetik üretir $(\alpha^{-1}(y) = \sqrt[3]{y})$. Ancak $x = 0$'da türevi $f'(0) = 0$ olduğundan α-türev formülünde tekillik yaratır.
- **Kuadratik Üretecin İnşası:** $f(x) = x^2$'deki birebirlik kaybını önlemek için işareti koruyan $\alpha(x) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}$ bijeksiyonu kullanılarak iyi tanımlı bir cisim elde edilir.

3.1 Genel α-Sıralama Bağıntısı ve α-Pozitif/Negatif Sayılar

Klasik analizde sıralama ve mutlak değer, farklar $(y - z > 0)$ ve 0 referansı üzerinden tanımlanır. Bir α-aritmetiğinde hangi sayının daha "büyük" olduğu (α-**sıralama**), başlangıç noktası 0_α'ya olan uzaklık (α-**mutlak değer**), üs-kök kuralları ve çarpanlara ayırma özdeşliklerinin yeni yapıda nasıl inşa edildiği bu bölümün temel konusudur.

Tanım 3.1. *(Genel α-Sıralama Bağıntısı ve α-Pozitif/Negatif Sayılar)*

$\alpha : \mathbb{R} \to A$ bir üreteç fonksiyonu olmak üzere her $y, z \in A$ için α-**sıralama** bağıntıları

$$y <_\alpha z \iff \alpha^{-1}(y) < \alpha^{-1}(z), \qquad y \leq_\alpha z \iff \alpha^{-1}(y) \leq \alpha^{-1}(z)$$

kurallarıyla tanımlanır. Bu bağıntı A üzerinde tam bir sıralama oluşturur. α-sıfır $0_\alpha = \alpha(0)$ referans alınarak α-**pozitif** ve α-**negatif** sayı kümeleri:

$$A^+ = \{y \in A : y >_\alpha 0_\alpha\} = \alpha(\mathbb{R}^+), \qquad A^- = \{y \in A : y <_\alpha 0_\alpha\} = \alpha(\mathbb{R}^-).$$

- **Monotonluk ve Sıralama Yönü:** α kesin artan ise klasik sıralamanın yönü aynen korunur $(x < y \implies \alpha(x) < \alpha(y))$; α kesin azalan ise sıralama yön değiştirir.
- **Cebirsel İşlemlerle Uyum:** Sıralama bağıntısı α-toplama ve α-çarpma ile tam uyumludur: her $w \in A$ için $y <_\alpha z \implies y +_\alpha w <_\alpha z +_\alpha w$ ve $w >_\alpha 0_\alpha$ için $y \times_\alpha w <_\alpha z \times_\alpha w$.
- **Tam Sıralı Cisim İzomorfizması:** $\alpha : (\mathbb{R}, +, \cdot, <) \to (A, +_\alpha, \times_\alpha, <_\alpha)$ dönüşümü bir **tam sıralı cisim izomorfizmasıdır**. Klasik reel sayılardaki geçişme, tamlık (supremum aksiyomu) ve Archimedes özellikleri α-sisteminde de eksiksiz sağlanır.

Önerme 3.2. *(1. Birim Üreteç — Klasik Sıralama ve Pozitiflik)*

$\alpha(x) = I(x) = x$ ve $\alpha^{-1}(y) = y$ için $\mathbb{R}_I = \mathbb{R}$ üzerinde α-sıralama:

$$y <_I z \iff I^{-1}(y) < I^{-1}(z) \iff y < z.$$

Başlangıç noktası $0_I = 0$ olup pozitif ve negatif kümeler:

$$A^+ = (0, \infty), \qquad A^- = (-\infty, 0).$$

Toplamsal uyum: $y < z \iff y + w < z + w$.

Önerme 3.3. *(2. Üstel Üreteç — Çarpımsal Sıralama ve Pozitiflik)*

$\alpha(x) = e^x$ ve $\alpha^{-1}(y) = \ln y$ için her $y, z \in \mathbb{R}_* = (0, \infty)$:

$$y <_* z \iff \ln y < \ln z \iff y < z.$$

Çarpımsal sıfır $0_* = 1$'e göre pozitif ve negatif kümeler:

$$\mathbb{R}_*^+ = \{y >_* 1\} = (1, \infty), \qquad \mathbb{R}_*^- = \{y <_* 1\} = (0, 1).$$

Çarpımsal uyum: $y <_* z \iff y \cdot w < z \cdot w$ $(w > 0)$.

Örnek 3.4. *(Klasik sıralama ve işaret analizi)*

$y = -5$ ve $z = 3$ sayıları için sıralama ve işaret analizi:

Çözüm: **(a) Klasik İşaret Analizi:**

$$-5 < 0 < 3 \implies y = -5 \in A^- \text{ (negatif)}, \quad z = 3 \in A^+ \text{ (pozitif)}.$$

(b) Toplamsal Sıralama Korunumu $(w = 4)$**:**

$$y < z \implies -5 + 4 = -1 < 3 + 4 = 7.$$

◀

Örnek 3.5. *(Çarpımsal sıralama: Tanımdan tam üstel hesap)*

$y = e^{-3}$ ve $z = e^2$ sayıları için çarpımsal sıralama analizi:

Çözüm: **(a) Tanımdan Sıralama** $(y = e^{-3},\ z = e^2)$**:**

$$\ln(e^{-3}) = -3 < \ln(1) = 0 < \ln(e^2) = 2 \implies e^{-3} <_* 1 <_* e^2.$$

$e^{-3} \in \mathbb{R}_*^-$ çarpımsal negatif, $e^2 \in \mathbb{R}_*^+$ çarpımsal pozitiftir.

(b) Çarpımsal Toplama Uyumu $(w = e^4)$**:**

$$e^{-3} <_* e^2 \implies e^{-3} +_* e^4 = e^1 <_* e^2 +_* e^4 = e^6.$$

◀

► **Çarpımsal Negatiflik** $(0 < y < 1)$**:** Çarpımsal sistemde başlangıç noktası $0_* = 1$ olduğundan, 1'den küçük pozitif reel sayılar (e^{-3} veya $1/4$ gibi) çarpımsal anlamda **negatif** $(\mathbb{R}_*^- = (0, 1))$ elemanlardır!

Önerme 3.6. *(3. Kuadratik ve 4. Harmonik Sıralama)*

- **Kuadratik** ($\alpha = q$)**:** $y <_q z \iff \operatorname{sgn}(y)y^2 < \operatorname{sgn}(z)z^2 \iff y < z$. $0_q = 0$ olup $A^+ = (0,\infty)$, $A^- = (-\infty, 0)$.
- **Harmonik** ($\alpha = h$)**:** $\alpha(x) = 1/x$ azalan olduğundan ($y, z > 0$):

$$y <_h z \iff \frac{1}{y} < \frac{1}{z} \iff y > z.$$

Önerme 3.7. *(5. Ötelenmiş Üreteç — Ötelenmiş Sıralama)*

$\alpha(x) = x + 1, \alpha^{-1}(y) = y - 1$ için $\mathbb{R}_{x+1} = \mathbb{R}$ üzerinde ötelenmiş sıralama:

$$y <_\alpha z \iff y - 1 < z - 1 \iff y < z.$$

Başlangıç noktası $0_\alpha = 1$ olduğundan pozitif ve negatif kümeler:

$$A^+ = (1,\infty), \qquad A^- = (-\infty, 1).$$

Örnek 3.8. *(Kuadratik ve harmonik sıralama hesapları)*

Çözüm: **(a) Kuadratik Sıralama** ($y = -4$, $z = 3$)**:**

$$\alpha^{-1}(-4) = -16 < 0 < 9 = \alpha^{-1}(3) \implies -4 <_q 0_q <_q 3.$$

(b) Harmonik Sıralama ($y = 12$, $z = 4$, $w = 2$)**:**

$$\frac{1}{12} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \implies 12 <_h 4 <_h 2.$$

Pozitif sayılar büyüdükçe harmonik olarak küçülür! ◀

Örnek 3.9. *(Ötelenmiş sıralama ve işaret analizi)*

Çözüm: **(a) Ötelenmiş Sıralama ve İşaret Analizi** ($y = -1$, $z = 3$)**:**

$$\alpha^{-1}(-1) = -2 < 0 = \alpha^{-1}(1) < 2 = \alpha^{-1}(3) \implies -1 <_\alpha 1 <_\alpha 3.$$

$0_\alpha = 1$ referansına göre $-1 \in A^-$ (α-negatif), $3 \in A^+$ (α-pozitif).
(b) α-Toplamsal Uyum ($w = 3$)**:**

$$-1 <_\alpha 4 \implies -1 +_\alpha 3 = 1 <_\alpha 4 +_\alpha 3 = 6.$$

◀

► **Sıralamanın Üreteç Bağımlılığı:** Harmonik sistemde pozitif sayılar çarpmaya göre tersleriyle (büyükten küçüğe), ötelenmiş sistemde ise $0_\alpha = 1$ referans kaymasıyla sıralanır.

3.4 Genel α-Mutlak Değer, Metrik ve Temel Teoremler

Bir sayının kendi α-sayı sistemindeki başlangıç noktası 0_α'ya olan α-uzaklığı **α-mutlak değer** ile tanımlanır.

Tanım 3.10. *(Genel α-Mutlak Değer ve α-Uzaklık (Metrik))*

Bir $y \in A$ elemanının **α-mutlak değeri** ve iki nokta $y, z \in A$ arasındaki **α-uzaklık (metrik)**

$$|y|_\alpha = \alpha\big(|\alpha^{-1}(y)|\big) = \begin{cases} y, & y \geq_\alpha 0_\alpha, \\ -_\alpha y, & y <_\alpha 0_\alpha, \end{cases} \qquad d_\alpha(y,z) = |y -_\alpha z|_\alpha = \alpha\big(|\alpha^{-1}(y) - \alpha^{-1}(z)|\big).$$

Teorem 3.11. *(α-Mutlak Değerin Aksiyomları ve α-Üçgen Eşitsizliği)*

Her $y, z \in A$ için α-mutlak değer klasik mutlak değerin tüm cebirsel ve metrik özelliklerini korur:

1. Pozitif Tanımlılık: $|y|_\alpha \geq_\alpha 0_\alpha$ ve $|y|_\alpha = 0_\alpha \iff y = 0_\alpha$, **2. Toplamsal Simetri:** $|-_\alpha y|_\alpha = |y|_\alpha$,

3. Çarpımsallık: $|y \times_\alpha z|_\alpha = |y|_\alpha \times_\alpha |z|_\alpha$, **4. Homojenlik:** $|y /_\alpha z|_\alpha = |y|_\alpha /_\alpha |z|_\alpha$ $(z \neq 0_\alpha)$,

5. α-Üçgen Eşitsizliği: $|y +_\alpha z|_\alpha \leq_\alpha |y|_\alpha +_\alpha |z|_\alpha$.

► **Geometrik Anlam (0_α'ya Olan α-Uzaklık):** Tanım gereği her $y \in A$ için $|y|_\alpha = d_\alpha(y, 0_\alpha)$ olup, α-mutlak değer o sistemin başlangıç noktası olan 0_α'ya olan mesafedir ve (A, d_α) tam bir metrik uzay oluşturur.

Önerme 3.12. *(1. Birim Üreteç — Klasik Mutlak Değer ve Öklid Uzaklığı)*
$\alpha(x) = x$ için klasik mutlak değer ve uzaklık:

$$|y|_I = |y| = \begin{cases} y, & y \geq 0, \\ -y, & y < 0, \end{cases} \qquad d_I(y,z) = |y - z|.$$

Özellikler: $|y \cdot z| = |y||z|$, $|y + z| \leq |y| + |z|$, $|-y| = |y|$.

Önerme 3.13. *(2. Üstel Üreteç — Çarpımsal Mutlak Değer ve Uzaklık)*
$\alpha(x) = e^x, \alpha^{-1}(y) = \ln y$ için her $y, z \in \mathbb{R}_* = (0, \infty)$:

$$|y|_* = e^{|\ln y|} = \begin{cases} y, & y \geq_* 1, \\ 1/y, & y <_* 1 \end{cases} = \max\left\{y, \frac{1}{y}\right\} \geq_* 1,$$

$$d_*(y,z) = e^{|\ln(y/z)|} = \max\left\{\frac{y}{z}, \frac{z}{y}\right\} \geq_* 1.$$

Örnek 3.14. *(Klasik mutlak değer ve üçgen eşitsizliği hesabı)*
$y = -6, z = 2$ sayıları için:

Çözüm: **(a) Mutlak Değerler ve Öklid Uzaklığı:**

$$|-6|_I = 6, \qquad |2|_I = 2, \qquad d_I(-6,2) = |-6-2| = 8.$$

(b) Çarpımsallık ve Üçgen Eşitsizliği:

$$|(-6)\cdot 2| = 12 = |-6||2|, \qquad |-6+2| = 4 \leq |-6| + |2| = 8.$$

◀

Örnek 3.15. *(Çarpımsal mutlak değer: Tanımdan tam üstel hesap)*
$y = e^{-2}, z = e^3$ sayıları için:

Çözüm: **(a) Mutlak Değer ve Çarpımsal Uzaklık:**

$$|e^{-2}|_* = e^{|-2|} = e^2, \quad |e^3|_* = e^3, \quad d_*(e^{-2}, e^3) = e^{|-2-3|} = e^5.$$

(b) Çarpımsal Üçgen Eşitsizliği Doğrulaması:

$$|e^{-2} +_* e^3|_* = |e^1|_* = e \leq_* |e^{-2}|_* +_* |e^3|_* = e^2 \cdot e^3 = e^5.$$

◀

► **Çarpımsal Mutlak Değer ($|e^a|_* = e^{|a|}$):** Çarpımsal sayılar e^a formunda yazıldığında çarpımsal mutlak değer doğrudan üssün klasik mutlak değerini alır ve sonuç daima $0_* = 1$'den büyük veya eşittir.

Önerme 3.16. *(3. Kuadratik ve 4. Harmonik Mutlak Değer)*

- **Kuadratik** ($\alpha = q$)**:** $|y|_q = \sqrt{y^2} = |y|, \quad d_q(y,z) = \sqrt{|y^2 - z^2|}$.
- **Harmonik** ($\alpha = h$)**:** $|y|_h = \frac{1}{|1/y|} = |y|, \quad d_h(y,z) = \frac{|yz|}{|y-z|}$.

Önerme 3.17. *(5. Ötelenmiş Üreteç — Ötelenmiş Mutlak Değer)*

$\alpha(x) = x+1, \alpha^{-1}(y) = y-1$ için $\mathbb{R}_{x+1} = \mathbb{R}$ üzerinde:

$$|y|_\alpha = |y-1|+1 = \begin{cases} y, & y \geq 1, \\ 2-y, & y < 1, \end{cases} \qquad d_\alpha(y,z) = |y-z|+1.$$

Örnek 3.18. *(Kuadratik ve harmonik uzaklık hesapları)*

Çözüm: **(a) Kuadratik Pisagor Uzaklığı** ($y = 5,\ z = 3$ **ve** $y = 13, z = 5$)**:**

$$d_q(5,3) = \sqrt{|5^2 - 3^2|} = 4, \qquad d_q(13,5) = \sqrt{|13^2 - 5^2|} = 12.$$

(b) Harmonik Uzaklık ($y = 6,\ z = 2$)**:**

$$|-6|_h = 6, \qquad d_h(6,2) = \frac{|6 \cdot 2|}{|6-2|} = \frac{12}{4} = 3.$$

◀

Örnek 3.19. *(Ötelenmiş mutlak değer ve üçgen eşitsizliği hesabı)*

Çözüm: **(a) Ötelenmiş Mutlak Değer ve Uzaklık** ($y = -2,\ z = 4$)**:**

$$|-2|_\alpha = 4, \qquad |4|_\alpha = 4, \qquad d_\alpha(-2,4) = |-2-4|+1 = 7.$$

(b) Ötelenmiş Üçgen Eşitsizliği Doğrulaması:

$$|-2 +_\alpha 4|_\alpha = |1|_\alpha = 1 \leq_\alpha |-2|_\alpha +_\alpha |4|_\alpha = 4 +_\alpha 4 = 7.$$

◀

► **Ötelenmiş Mutlak Değerin Alt Sınırı** ($|y|_\alpha \geq 1$)**:** Ötelenmiş sistemin başlangıç noktası $0_\alpha = 1$ olduğundan, başlangıç noktasına olan uzaklık 1'den küçük olamaz ($|y|_\alpha = |y-1|+1 \geq 1$).

3.7 Genel α-Kuvvet İşlemi ve Temel Kurallar

Klasik üs alma, ardışık çarpmanın fonksiyonel genellemesidir. Bir α-aritmetiğinde **α-kuvvet işlemi** yapı taşıma ilkesiyle tanımlanır.

Tanım 3.20. *(Genel α-Kuvvet İşlemi)*
$\alpha : \mathbb{R} \to A$ bir üreteç fonksiyonu olmak üzere bir $y \in A$ elemanının $p \in \mathbb{R}$ mertebeden **α-kuvveti**

$$y^{p_\alpha} = \alpha\Big(\big(\alpha^{-1}(y)\big)^p\Big) \quad (p \in \mathbb{R})$$

bağıntısıyla tanımlanır ($p = 2$ için $y^{2_\alpha} = \alpha((\alpha^{-1}(y))^2)$ ifadesine **α-kare**, $p = 3$ için $y^{3_\alpha} = \alpha((\alpha^{-1}(y))^3)$ ifadesine **α-küp** denir).

Teorem 3.21. *(α-Kuvvet Kurallarının Korunumu)*
Cisim izomorfizması altında klasik üslü sayı kuralları α-aritmetiğinde aynen korunur:

$$(y \times_\alpha z)^{p_\alpha} = y^{p_\alpha} \times_\alpha z^{p_\alpha}, \qquad y^{p_\alpha} \times_\alpha y^{q_\alpha} = y^{(p+q)_\alpha},$$
$$(y^{p_\alpha})^{q_\alpha} = y^{(p\cdot q)_\alpha}, \qquad (y /_\alpha z)^{p_\alpha} = y^{p_\alpha} /_\alpha z^{p_\alpha} \quad (z \neq 0_\alpha).$$

- **Negatif Kuvvet ve Ters Eleman:** Negatif kuvvetler çarpımsal ters üzerinden $y^{(-p)_\alpha} = (y^{-1_\alpha})^{p_\alpha}$ bağıntısıyla verilir.
- **İzomorfizma Güvencesi:** $\alpha : (\mathbb{R}, +, \cdot) \to (A, +_\alpha, \times_\alpha)$ bir cisim izomorfizması olduğundan, klasik üslü sayılardaki tüm taban ve üs kuralları α-karşılıklarıyla doğrudan sağlanır.

Önerme 3.22. *(1. Birim Üreteç — Klasik Kuvvet Formülleri)*
$\alpha(x) = I(x) = x$ seçildiğinde $\mathbb{R}_I = \mathbb{R}$ üzerinde klasik kuvvet:

$$y^{p_I} = y^p, \qquad y^{2_I} = y^2, \qquad y^{3_I} = y^3.$$

Özellikler: $(yz)^p = y^p z^p$, $y^p y^q = y^{p+q}$, $(y^p)^q = y^{pq}$.

Önerme 3.23. *(2. Üstel Üreteç — Çarpımsal Kuvvet Formülleri)*
$\alpha(x) = e^x, \alpha^{-1}(y) = \ln y$ için her $y \in \mathbb{R}_* = (0,\infty)$ ve $p \in \mathbb{R}$:

$$y^{p_*} = e^{(\ln y)^p}, \qquad y^{2_*} = e^{(\ln y)^2}, \qquad y^{3_*} = e^{(\ln y)^3}.$$

Özellikler: $(y \times_* z)^{p_*} = y^{p_*} \times_* z^{p_*}$, $(y^{p_*})^{q_*} = y^{(pq)_*}$.

Örnek 3.24. *(Klasik kuvvet ve üs kuralları hesabı)*
$y = 3, z = 2$ sayıları için:

Çözüm: **(a) Kare, Küp ve Negatif Kuvvet:**

$$3^{2_I} = 3^2 = 9, \qquad 3^{3_I} = 3^3 = 27, \qquad 3^{-2_I} = \frac{1}{9}.$$

(b) Çarpım Kuralı Doğrulaması:

$$(3 \cdot 2)^2 = 6^2 = 36 = 3^2 \cdot 2^2 = 9 \cdot 4 = 36.$$

◀

Örnek 3.25. *(Çarpımsal kuvvet: Tanımdan tam üstel hesap)*
$y = e^3, z = e^2$ sayıları için:

Çözüm: **(a) Tanımdan Çarpımsal Kare ve Küp:**

$$(e^3)^{2_*} = e^{3^2} = e^9, \qquad (e^{-2})^{2_*} = e^{(-2)^2} = e^4, \qquad (e^2)^{3_*} = e^{2^3} = e^8.$$

(b) Kuvvet Çarpım Kuralı Doğrulaması ($p = 2$):

$$(e^3 \times_* e^2)^{2_*} = (e^6)^{2_*} = e^{36} = e^9 \times_* e^4 = e^{9 \cdot 4} = e^{36}.$$

◀

► **Çarpımsal Kuvvet Özelliği ($(e^a)^{p_*} = e^{a^p}$):** Çarpımsal kalkülüste üs alma işlemi, sayının doğal logaritmik üssündeki klasik kuvvet alma işlemine denk gelir!

Önerme 3.26. *(3. Kuadratik ve 4. Harmonik Kuvvet)*

- **Kuadratik** ($\alpha = q$)**:** $y^{p_q} = \sqrt{(y^2)^p} = y^p$, özellikle $y^{2_q} = y^2$.
- **Harmonik** ($\alpha = h$)**:** $y^{p_h} = \frac{1}{(1/y)^p} = y^p$, özellikle $y^{2_h} = y^2$.

Önerme 3.27. *(5. Ötelenmiş Üreteç — Ötelenmiş Kuvvet)*

$\alpha(x) = x + 1, \alpha^{-1}(y) = y - 1$ için ötelenmiş kuvvet:

$$y^{p_\alpha} = (y-1)^p + 1, \qquad y^{2_\alpha} = (y-1)^2 + 1, \qquad y^{3_\alpha} = (y-1)^3 + 1.$$

Örnek 3.28. *(Kuadratik ve harmonik kuvvet hesapları)*

Çözüm: **(a) Kuadratik Kuvvet** ($y = 3$, $z = 4$)**:**

$$3^{2_q} = 3^2 = 9, \qquad (3 \times_q 4)^{2_q} = 12^2 = 144 = 3^2 \cdot 4^2.$$

(b) Harmonik Kuvvet ($y = 2$)**:**

$$2^{3_h} = 2^3 = 8, \qquad 2^{-1_h} = \frac{1}{2}.$$

◀

Örnek 3.29. *(Ötelenmiş kuvvet ve çarpım kuralı hesabı)*

Çözüm: **(a)** $y = 5$ **ve** $z = 3$ **İçin** α**-Kuvvetler:**

$$5^{2_\alpha} = (5-1)^2 + 1 = 17, \quad 5^{3_\alpha} = 4^3 + 1 = 65, \quad 3^{2_\alpha} = 2^2 + 1 = 5.$$

(b) Kuvvet Çarpım Kuralı Doğrulaması ($p = 2$)**:**

$$(5 \times_\alpha 3)^{2_\alpha} = 9^{2_\alpha} = 65 = 5^{2_\alpha} \times_\alpha 3^{2_\alpha} = 17 \times_\alpha 5 = 65!$$

◀

► **Ötelenmiş Karede Kayma ve Cisim Uyumu:** Ötelenmiş sistemde $y = 5$ sayısının α-karesi 25 değil, $(5-1)^2 + 1 = 17$'dir; tüm kuvvet kuralları α-çarpma ile tam uyumludur.

3.10 Genel α-Kök İşlemi ve Temel Kurallar

Bir α-aritmetiğinde kök bulma işlemi, α-kuvvet işleminin cebirsel ve fonksiyonel tersi olarak tanımlanır.

Tanım 3.30. *(Genel α-Kök İşlemi)*

$\alpha : \mathbb{R} \to A$ bir üreteç fonksiyonu olmak üzere bir $y \in A$ elemanının $n \in \mathbb{N}^+$ dereceden **α-kökü**

$$\sqrt[n]{y}_\alpha = y^{(1/n)_\alpha} = \alpha\left(\sqrt[n]{\alpha^{-1}(y)}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

bağıntısıyla tanımlanır ($n = 2$ için $\sqrt{y}_\alpha = \alpha(\sqrt{\alpha^{-1}(y)})$ ifadesine **α-karekök**, $n = 3$ için $\sqrt[3]{y}_\alpha = \alpha(\sqrt[3]{\alpha^{-1}(y)})$ ifadesine **α-küpkök** denir).

Teorem 3.31. *(α-Kök Kurallarının Korunumu ve Kuvvet ile Terslik)*

Cisim izomorfizması altında klasik köklü ifade özellikleri α-aritmetiğinde aynen geçerlidir:

$$\sqrt[n]{y \times_\alpha z}_\alpha = \sqrt[n]{y}_\alpha \times_\alpha \sqrt[n]{z}_\alpha, \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{y}_\alpha}_\alpha = \sqrt[(n\cdot m)]{y}_\alpha,$$

$$\left(\sqrt[n]{y}_\alpha\right)^{n_\alpha} = y, \qquad \sqrt[n]{y^{n_\alpha}}_\alpha = y \quad (y \geq_\alpha 0_\alpha).$$

► **α-Kuvvet ve α-Kökün Terslik İlkesi:** Her $y \geq_\alpha 0_\alpha$ için $\sqrt{y^{2_\alpha}}_\alpha = y$ ve $\left(\sqrt{y}_\alpha\right)^{2_\alpha} = y$ olup, α-karekök ve α-kare birbirinin tam fonksiyonel tersidir.

Önerme 3.32. *(1. Birim Üreteç — Klasik Kök Formülleri)*
$\alpha(x) = I(x) = x$ seçildiğinde $\mathbb{R}_I = \mathbb{R}$ üzerinde klasik kök:

$$\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{y}, \qquad \sqrt[I]{y} = \sqrt{y}, \qquad \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{y}.$$

Önerme 3.33. *(2. Üstel Üreteç — Çarpımsal Kök Formülleri)*
$\alpha(x) = e^x, \alpha^{-1}(y) = \ln y$ için her $y \in \mathbb{R}_*$ $(y \geq_* 1)$:

$$\sqrt[n]{y} = e^{\sqrt[n]{\ln y}}, \qquad \sqrt[*]{y} = e^{\sqrt{\ln y}}, \qquad \sqrt[3]{y} = e^{\sqrt[3]{\ln y}}.$$

Örnek 3.34. *(Klasik kök hesabı ve çarpım kuralı)*
$y = 9$ ve $z = 4$ sayıları için:

Çözüm: **(a) Karekök ve Küpkök Değerleri:**

$$\sqrt{9} = 3, \qquad \sqrt[3]{8} = 2, \qquad \sqrt[4]{16} = 2.$$

(b) Kök Çarpım Kuralı:

$$\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{36} = 6 = \sqrt{9}\sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6.$$

◀

Örnek 3.35. *(Çarpımsal kök: Tanımdan tam üstel hesap)*
$y = e^9, z = e^8$ sayıları için:

Çözüm: **(a) Tanımdan Çarpımsal Karekök ve Küpkök:**

$$\sqrt[*]{e^9} = e^{\sqrt{\ln(e^9)}} = e^3, \qquad \sqrt[*]{e^{16}} = e^4, \qquad \sqrt[3]{e^8} = e^{\sqrt[3]{8}} = e^2.$$

(b) Kuvvet-Kök Terslik Doğrulaması:

$$(\sqrt[*]{e^9})^{2_*} = (e^3)^{2_*} = e^{3^2} = e^9, \qquad (\sqrt[3]{e^8})^{3_*} = (e^2)^{3_*} = e^8!$$

◀

► **Çarpımsal Kök Özelliği** ($\sqrt[n]{e^a} = e^{\sqrt[n]{a}}$)**:** Çarpımsal kök alma işlemi, sayının doğal logaritmik üssündeki klasik kök alma işlemine karşılık gelir.

Önerme 3.36. *(3. Kuadratik ve 4. Harmonik Kök)*

- **Kuadratik** ($\alpha = q$): $\sqrt[q]{y} = \sqrt{\sqrt{y^2}} = \sqrt{y}$.
- **Harmonik** ($\alpha = h$): $\sqrt[h]{y} = \frac{1}{\sqrt{1/y}} = \sqrt{y}$.

Önerme 3.37. *(5. Ötelenmiş Üreteç — Ötelenmiş Kök)*

$\alpha(x) = x + 1$ için ötelenmiş kök ($y \geq 1$):

$$\sqrt[\alpha]{y} = \sqrt{y-1} + 1, \qquad \sqrt[3_\alpha]{y} = \sqrt[3]{y-1} + 1.$$

Örnek 3.38. *(Kuadratik ve harmonik kök hesapları)*

Çözüm: **(a) Kuadratik Kök Hesabı:**

$$\sqrt[q]{16} = \sqrt{16} = 4, \qquad \sqrt[q]{25} = 5.$$

(b) Harmonik Kök Hesabı:

$$\sqrt[h]{25} = \sqrt{25} = 5, \qquad \sqrt[3_h]{8} = 2.$$

◀

Örnek 3.39. *(Ötelenmiş kök hesabı ve sağlaması)*

Çözüm: **(a)** $y = 17$ **Sayısının** α**-Karekökü:**

$$\sqrt[\alpha]{17} = \sqrt{17-1} + 1 = 4 + 1 = 5 \quad \left(5^{2_\alpha} = (5-1)^2 + 1 = 17\right).$$

(b) $z = 65$ **Sayısının** α**-Küpkökü:**

$$\sqrt[3_\alpha]{65} = \sqrt[3]{65-1} + 1 = 4 + 1 = 5 \quad \left(5^{3_\alpha} = (5-1)^3 + 1 = 65\right).$$

◀

► **Kök ve Kuvvetin Evrensel Tersliği:** $(\sqrt[\alpha]{y})^{2_\alpha} = y$ özdeşliği tüm Nevtonyen olmayan sayı sistemlerinde istisnasız korunur.

3.13 Genel α-İki Kare Farkı ve α-Tam Kare Açılımları

Klasik cebirde polinomların çarpanlara ayrılmasını sağlayan iki kare farkı, tam kare ve iki küp farkı açılımları, α-izomorfizması sayesinde Nevtonyen olmayan cebirde birebir karşılık bulur.

Teorem 3.40. *(Temel α-Özdeşlikleri ve Çarpanlara Ayırma Formülleri)*

Her $y, z \in A$ için α-aritmetiğinde aşağıdaki temel özdeşlikler sağlanır:

1. **α-İki Kare Farkı:**
$$y^{2_\alpha} -_\alpha z^{2_\alpha} = (y -_\alpha z) \times_\alpha (y +_\alpha z).$$

2. **α-Tam Kare Açılımı:**
$$(y +_\alpha z)^{2_\alpha} = y^{2_\alpha} +_\alpha (2_\alpha \times_\alpha y \times_\alpha z) +_\alpha z^{2_\alpha}, \qquad (y -_\alpha z)^{2_\alpha} = y^{2_\alpha} -_\alpha (2_\alpha \times_\alpha y \times_\alpha z) +_\alpha z^{2_\alpha}.$$

3. **α-İki Küp Farkı:**
$$y^{3_\alpha} -_\alpha z^{3_\alpha} = (y -_\alpha z) \times_\alpha \left(y^{2_\alpha} +_\alpha (y \times_\alpha z) +_\alpha z^{2_\alpha}\right).$$

- **Cebirsel İzomorfizma:** Klasik cebirsel çarpanlara ayırma formülleri, sembollerin ve katsayıların α-karşılıklarıyla ($2_\alpha = \alpha(2)$ vb.) aynen korunur.
- **Genel α-Binom Açılımı:** Pascal üçgeni ve binom katsayıları her α-aritmetiğinde geçerlidir.

Önerme 3.41. *(1. Birim Üreteç — Klasik İki Kare Farkı ve Tam Kare)*
$\alpha(x) = x$ için:

$$y^{2_I} -_I z^{2_I} = y^2 - z^2 = (y-z)(y+z),$$
$$(y+z)^2 = y^2 + 2yz + z^2.$$

Önerme 3.42. *(2. Üstel Üreteç — Çarpımsal İki Kare Farkı ve Tam Kare)*
$\alpha(x) = e^x$ için her $y, z \in \mathbb{R}_*$:

$$y^{2_*} -_* z^{2_*} = \frac{e^{(\ln y)^2}}{e^{(\ln z)^2}} = e^{(\ln y)^2 - (\ln z)^2} = (y -_* z) \times_* (y +_* z).$$

Çarpımsal tam kare: $(y +_* z)^{2_*} = (y \cdot z)^{2_*} = e^{(\ln(yz))^2}$.

Örnek 3.43. *(Klasik iki kare farkı ve tam kare hesabı)*
$y = 5, z = 3$ sayıları için:

Çözüm: **(a) Klasik İki Kare Farkı:**

$$5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 = (5-3)(5+3) = 2 \cdot 8 = 16.$$

(b) Klasik Tam Kare Açılımı:

$$(5+3)^2 = 8^2 = 64 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3 + 3^2 = 64.$$

◀

Örnek 3.44. *(Çarpımsal iki kare farkı: $y = e^4, z = e^2$)*
$y = e^4, z = e^2$ sayıları için:

Çözüm: **(a) Sol Taraf Hesabı:**

$$(e^4)^{2_*} -_* (e^2)^{2_*} = e^{16} -_* e^4 = \frac{e^{16}}{e^4} = e^{16-4} = e^{12}.$$

(b) Sağ Taraf Hesabı ($y -_* z = e^2$, $y +_* z = e^6$)**:**

$$(y -_* z) \times_* (y +_* z) = e^2 \times_* e^6 = e^{2 \cdot 6} = e^{12}!$$

◀

► **Çarpımsal İki Kare Farkı Üslerde Klasik İki Kare Farkıdır:** $y = e^a, z = e^b$ için $(e^a)^{2_*} -_* (e^b)^{2_*} = e^{a^2-b^2} = e^{(a-b)(a+b)}$ olup doğrudan üsler üzerindeki klasik iki kare farkıdır.

Önerme 3.45. *(3. Kuadratik ve 4. Harmonik İki Kare Farkı)*
Kuadratik ve harmonik sistemlerde $y^{2_q} = y^2$ ve $\times_q$ klasik çarpma olduğundan:

$$y^{2_q} -_q z^{2_q} = \sqrt{y^4 - z^4} = \sqrt{y^2 - z^2} \cdot \sqrt{y^2 + z^2} = (y -_q z) \times_q (y +_q z).$$

Önerme 3.46. *(5. Ötelenmiş İki Kare Farkı)*
$\alpha(x) = x + 1$ altında $y^{2_\alpha} = (y-1)^2 + 1$ olup:

$$y^{2_\alpha} -_\alpha z^{2_\alpha} = (y-1)^2 - (z-1)^2 + 1 = (y -_\alpha z) \times_\alpha (y +_\alpha z).$$

Örnek 3.47. *(Kuadratik iki kare farkı hesabı ($y = 5, z = 3$))*

Çözüm: **(a) Kuadratik Sol Taraf** ($5^{2_q} = 25$, $3^{2_q} = 9$)**:**

$$5^{2_q} -_q 3^{2_q} = 25 -_q 9 = \sqrt{25^2 - 9^2} = \sqrt{544} = 4\sqrt{34}.$$

(b) Kuadratik Sağ Taraf ($5 -_q 3 = 4$, $5 +_q 3 = \sqrt{34}$)**:**

$$(5 -_q 3) \times_q (5 +_q 3) = 4 \cdot \sqrt{34} = 4\sqrt{34}!$$

◀

Örnek 3.48. *(Ötelenmiş iki kare farkı doğrulaması ($y = 5, z = 3$))*

Çözüm: **(a) Sol Taraf Hesabı** ($5^{2_\alpha} = 17$, $3^{2_\alpha} = 5$)**:**

$$5^{2_\alpha} -_\alpha 3^{2_\alpha} = 17 -_\alpha 5 = 17 - 5 + 1 = 13.$$

(b) Sağ Taraf Hesabı ($5 -_\alpha 3 = 3$, $5 +_\alpha 3 = 7$)**:**

$$(5 -_\alpha 3) \times_\alpha (5 +_\alpha 3) = 3 \times_\alpha 7 = (3-1)(7-1) + 1 = 13!$$

◀

► **Analize Hazırlık:** Bu özdeşlikler, α-türev ve α-limit hesaplanırken karşılaşılacak $0_\alpha / {}_\alpha 0_\alpha$ belirsizliklerini sadeleştirmek için en temel cebirsel araçlardır.

4.1 Genel α-Öklid Uzayı ($\mathbb{E}^n_\alpha$) ve Geometrik Yapı Taşıma İzomorfizması

Klasik Öklid geometrisi ($\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$), düz Kartezyen uzayda doğrusal ötelemeler ve mutlak farklar üzerine kuruludur. Doğadaki katlanarak büyüyen süreçler (allometrik büyüme, logaritmik spiraller, Cobb–Douglas yüzeyleri), klasik uzayda doğrusal olmayan formlar alırken; bir $\alpha : \mathbb{R} \to A$ üreteciyle donatılan **Nevtonyen olmayan Öklid uzayında** ($\mathbb{E}^n_\alpha$) doğrusal ve sabit eğrilikli yapılara dönüşür.

Tanım 4.1. *(Genel α-Öklid Uzayı ($\mathbb{E}^n_\alpha$) ve α-Metrik)*
Bir $\alpha : \mathbb{R} \to A$ üreteç fonksiyonu verildiğinde, $A^n = \mathbb{R}^n_\alpha$ kümesi üzerinde $+_\alpha, \times_\alpha$ işlemleri ve α-uzaklık metriği

$$d_\alpha(P,Q) = \alpha\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha^{-1}(x_i) - \alpha^{-1}(y_i)\right)^2}\right)$$

ile donatılan metrik uzaya **α-Öklid uzayı** ($\mathbb{E}^n_\alpha$) denir.

- **İzometrik Harita ve Doğal Koordinatlar:** $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^n_\alpha$ dönüşümü bir izometrik izomorfizmadır. Bir $P = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{E}^n_\alpha$ noktası klasik uzayda $\alpha^{-1}(P) = (\alpha^{-1}(x_1), \ldots, \alpha^{-1}(x_n)) \in \mathbb{R}^n$ vektörüne kodlanır.
- **Eğrilerin Doğrusal Dünyası:** Klasik Kartezyen gözlükle bakıldığında bükümlü veya asimetrik "eğri/yüzey" gibi görünen pek çok geometrik yapı; Nevtonyen olmayan geometrinin doğal cetveli (d_α) ile ölçüldüğünde **tam birer düz doğru, afin düzlem, simetrik çember, küre ve dairesel konidir**.
- **Bölüm 4 Kapsamı:** Bu bölümde sırasıyla **α-Doğru**, **α-Düzlem**, **α-Çember**, **α-Küre** ve **Çift Kanatlı α-Koni** yapıları; genel α-tanımları, dört temel üreteç önermeleri, kapalı analitik örnekleri ve 2B/3B karşılaştırmalı grafikleriyle incelenmektedir.

Tanım 4.2. *(Genel α-Doğru Tanımı ve Denklemi)*

α-Öklid uzayında iki nokta arasındaki en kısa α-yol boyunca uzanan veya α-eğimi her noktada sabit olan noktaların geometrik yerine **α-doğru** denir. $\mathbb{E}^2_\alpha$ düzleminde genel denklemi $A, B \neq 0_\alpha$ olmak üzere

$$A \times_\alpha x +_\alpha B \times_\alpha y +_\alpha C = 0_\alpha \iff y = m \times_\alpha x +_\alpha n.$$

Önerme 4.3. *(1. Birim Üreteç — Klasik Doğru)*

$\alpha(x) = x$ için klasik toplama ve çarpma işlemleriyle $(+_I, \times_I)$:

$$y = m \times_I x +_I n = m \cdot x + n.$$

Önerme 4.4. *(2. Üstel Üreteç — Çarpımsal Doğru)*

$\alpha(x) = e^x$ için çarpımsal işlemlerle $(+_*, \times_*)$:

$$y = m \times_* x +_* n = e^{\ln m \ln x + \ln n} = n \cdot x^{\ln m} = c \cdot x^k.$$

Önerme 4.5. *(3. Kuadratik Üreteç — Kuadratik Doğru)*

$\alpha(x) = \sqrt{x}$ için kuadratik işlemlerle $(+_q, \times_q)$:

$$y = m \times_q x +_q n = \sqrt{m^2x^2 + n^2} \iff y^2 = m^2x^2 + n^2.$$

Önerme 4.6. *(4. Harmonik Üreteç — Harmonik Doğru)*

$\alpha(x) = 1/x$ için harmonik işlemlerle $(+_h, \times_h)$:

$$y = m \times_h x +_h n = \frac{1}{\frac{1}{mx} + \frac{1}{n}} = \frac{mnx}{mx + n} \iff \frac{1}{y} = \frac{1}{mx} + \frac{1}{n}.$$

► **İzometrik Doğrusallaştırma ve α-Eğim Karakterizasyonu:** α^{-1} koordinat dönüşümü altında genel α-doğru denklemi $\alpha^{-1}(y) = \alpha^{-1}(m)\,\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(n)$ biçiminde klasik doğrusal forma dönüşür. Burada α-eğim $m \in A$ sabit olup, Kartezyen düzlemde eğrisel görünen kuvvet ve doygunluk fonksiyonları kendi α-uzaylarında sabit eğimli birer doğrudur.

Örnek 4.7. *(Klasik ve Çarpımsal Doğru Denklemleri)*
Aşağıda klasik ve çarpımsal doğru denklemleri elde edilmiştir:

Çözüm:

- **(a) Klasik Doğru Formu:** $m = 2$ ve $n = 1$ için klasik doğru denklemi:
$$y = m \times_I x +_I n = mx + n = 2x + 1.$$
- **(b) Çarpımsal Doğru Formu:** $m = e^2$ ve $n = e$ için çarpımsal doğru denklemi:
$$y = m \times_* x +_* n = e^{\ln m \ln x + \ln n} = e^{2\ln x + 1} = e \cdot x^2.$$
- **(c) Nokta Testi:** $x = 1 = 0_* \implies y = e = 1_*$; $x = e \implies y = e^3$.

Klasik uzayda parabolik bir eğri olan $y = ex^2$, çarpımsal düzlemde eğimi $m = e^2$ olan tam bir **doğrudur**! ◀

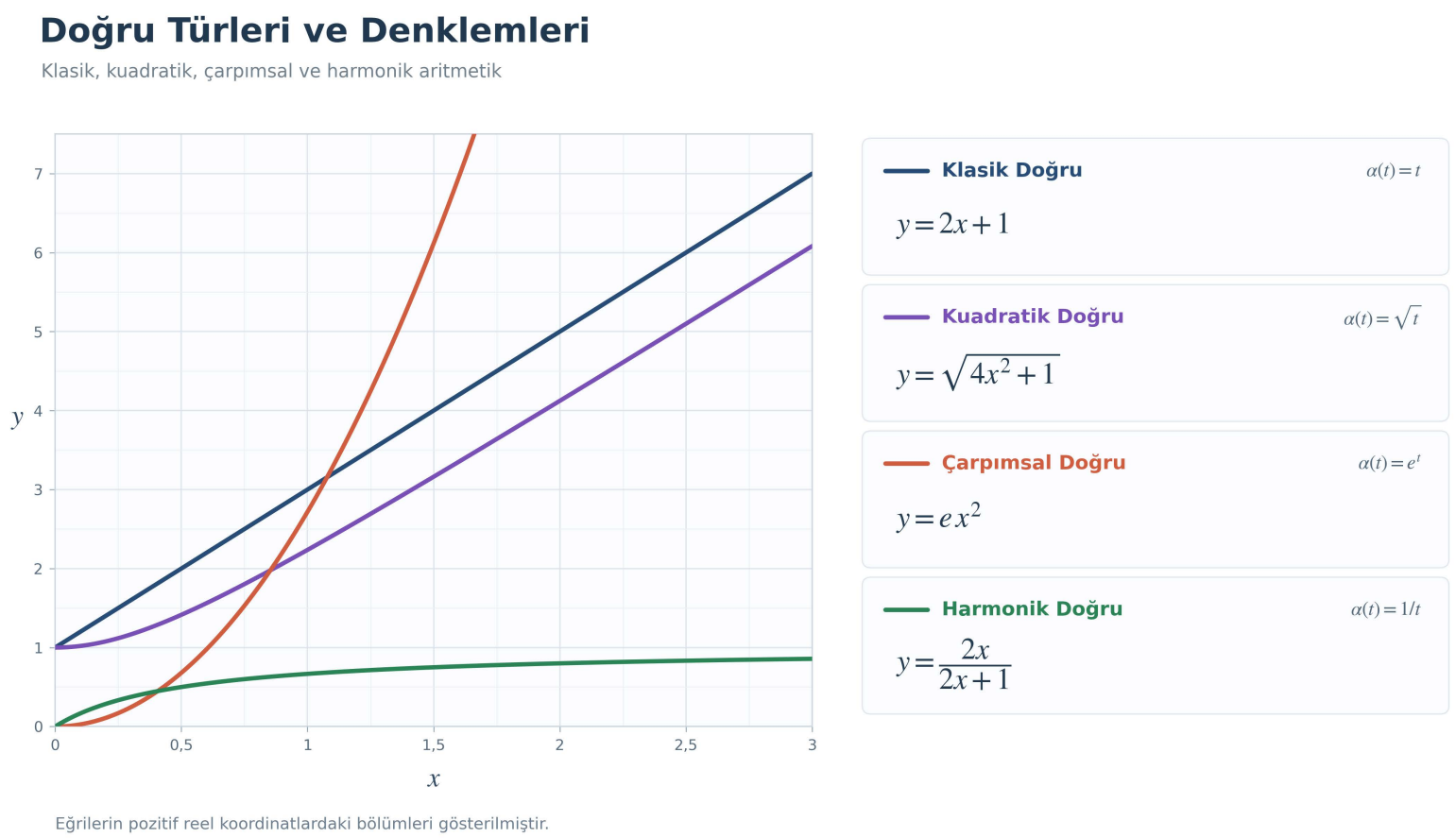
Örnek 4.8. *(Kuadratik ve Harmonik Doğru Denklemleri)*
Aşağıda kuadratik ve harmonik doğru denklemleri elde edilmiştir:

Çözüm:

- **(a) Kuadratik Doğru Formu:** $m = 2$ ve $n = 1$ için kuadratik doğru denklemi:
$$y = m \times_q x +_q n = \sqrt{m^2x^2 + n^2} = \sqrt{4x^2 + 1}.$$
- **(b) Harmonik Doğru Formu:** $m = 2$ ve $n = 1$ için harmonik doğru denklemi:
$$y = m \times_h x +_h n = \frac{mnx}{mx + n} = \frac{2x}{2x + 1}.$$
- **(c) Asimptotik Davranış:** $x \to \infty \implies y \to n = 1$ doygunluk sınırı.

Kuadratik doğru klasik düzlemde hiperbol kolu, harmonik doğru ise doygunluk eğrisi olup kendi α-uzaylarında **doğrudur**! ◀

- **Logaritmik Eksenlerde Doğrusallık:** $\ln x$ ve $\ln y$ eksenlerinde $y = ex^2$ kuvvet eğrisi, $\ln y = 2\ln x + 1$ denklemiyle eğimi $\ln m = 2$ ve eksen kesimi $\ln n = 1$ olan standart bir afin doğruya dönüşür.
- **Resiprokal Koordinatlarda Homografik Doğrusallık:** Harmonik doğru $y = \frac{2x}{2x+1}$, klasik analizde kesirli doğrusal (Möbius) bir dönüşüm olup $(u, v) = (1/x, 1/y)$ resiprokal koordinat düzleminde $v = \frac{1}{2}u + 1$ denklemli afin bir doğruya dönüşür.



Şekil 4.1. Farklı üreteç fonksiyonlarına göre Nevtonyen olmayan doğruların tek koordinat sisteminde karşılaştırmalı görünümü (doğru etiketleri çerçeve dışındadır).

4.5 Genel α-Düzlem Tanımı ve Farklı Üreteçlerde Düzlem Denklemleri

Tanım 4.9. *(Genel α-Düzlem Tanımı ve Denklemleri)*
$\mathbb{E}^3_\alpha$ uzayında sabit bir α-normal vektörüne α-dik olan veya doğrusal α-denklemi sağlayan noktaların geometrik yerine **α-düzlem** denir. Analitik denklemleri $A, B, C \neq 0_\alpha$ olmak üzere:

$$A \times_\alpha x +_\alpha B \times_\alpha y +_\alpha C \times_\alpha z +_\alpha D = 0_\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad z = m_1 \times_\alpha x +_\alpha m_2 \times_\alpha y +_\alpha n.$$

Önerme 4.10. *(1. Birim Üreteç — Klasik Düzlem)*
$\alpha(x) = x$ için standart Öklid afin düzlemidir:

$$z = m_1 \times_I x +_I m_2 \times_I y +_I n = m_1 x + m_2 y + n.$$

Önerme 4.11. *(2. Üstel Üreteç — Çarpımsal Düzlem)*
$\alpha(x) = e^x$ için çarpımsal işlemlerle $(+_*, \times_*)$:

$$z = m_1 \times_* x +_* m_2 \times_* y +_* n = n \cdot x^{\ln m_1} y^{\ln m_2}.$$

Önerme 4.12. *(3. Kuadratik Üreteç — Kuadratik Düzlem)*
$\alpha(x) = \sqrt{x}$ için kuadratik işlemlerle $(+_q, \times_q)$:

$$z = m_1 \times_q x +_q m_2 \times_q y +_q n = \sqrt{m_1^2 x^2 + m_2^2 y^2 + n^2}.$$

Önerme 4.13. *(4. Harmonik Üreteç — Harmonik Düzlem)*
$\alpha(x) = 1/x$ için harmonik işlemlerle $(+_h, \times_h)$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{m_1 x} + \frac{1}{m_2 y} + \frac{1}{n} \Longleftrightarrow z = \frac{m_1 m_2 n x y}{m_2 n y + m_1 n x + m_1 m_2 x y}.$$

► **Üreteç Dönüşümü ve α-Düzlem Karakterizasyonu:** $\alpha^{-1}(z) = \alpha^{-1}(m_1)\,\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(m_2)\,\alpha^{-1}(y) + \alpha^{-1}(n)$ bağıntısı uyarınca; Cobb–Douglas yüzeyleri $(\alpha = e^x)$, eliptik hiperboloidler $(\alpha = \sqrt{x})$ ve çift girdili harmonik yüzeyler $(\alpha = 1/x)$ kendi doğal α-uzaylarında düz birer afin düzlemdir.

Örnek 4.14. *(Klasik ve Çarpımsal Düzlem Denklemleri)*
Aşağıda klasik ve çarpımsal düzlem denklemleri elde edilmiştir:

Çözüm:

- **(a) Klasik Düzlem Formu:** $m_1 = 1, m_2 = 2$ ve $n = 3$ için klasik düzlem:
$$z = m_1 \times_I x +_I m_2 \times_I y +_I n = x + 2y + 3.$$
- **(b) Çarpımsal Düzlem Formu:** $m_1 = e, m_2 = e^2$ ve $n = e^3$ için çarpımsal düzlem:
$$z = m_1 \times_* x +_* m_2 \times_* y +_* n = e^{\ln x + 2\ln y + 3} = e^3 xy^2.$$
- **(c) Nokta Testi:** $x = 1 = 0_*, y = 1 = 0_* \implies z = e^3 = n.$

Bu yüzey çarpımsal geometride 1. derece düzlem, klasik uzayda **Cobb–Douglas yüzeyidir**!

◀

Örnek 4.15. *(Kuadratik ve Harmonik Düzlem Denklemleri)*
Aşağıda kuadratik ve harmonik düzlem denklemleri elde edilmiştir:

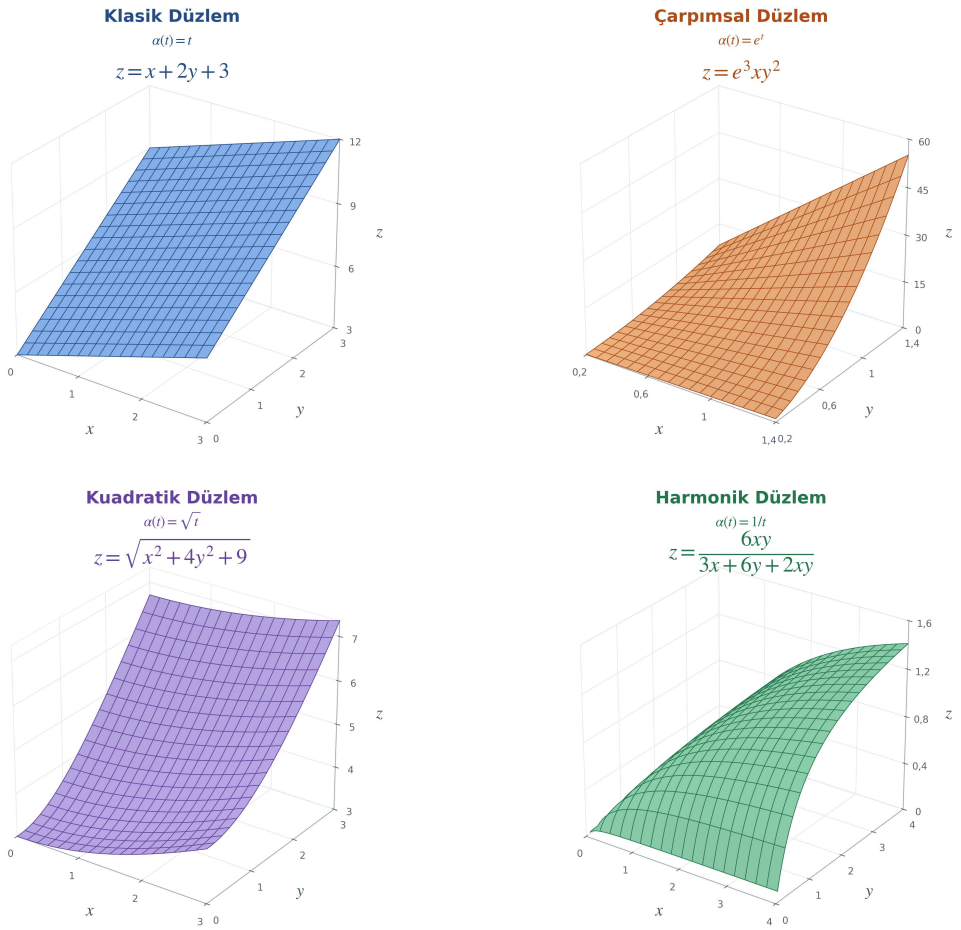
Çözüm:

- **(a) Kuadratik Düzlem Formu:** $m_1 = 1, m_2 = 2$ ve $n = 3$ için kuadratik düzlem:
$$z = \sqrt{m_1^2 x^2 + m_2^2 y^2 + n^2} = \sqrt{x^2 + 4y^2 + 9}.$$
- **(b) Harmonik Düzlem Formu:** $m_1 = 1, m_2 = 2$ ve $n = 3$ için harmonik düzlem:
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3} \iff z = \frac{6xy}{3x + 6y + 2xy}.$$
- **(c) Asimptotik Tavan:** $x, y \to \infty \implies z \to 3 = n$ yatay sınır düzlemi.

Kuadratik düzlem eliptik hiperboloid $(z^2 - x^2 - 4y^2 = 9)$, harmonik düzlem ise rasyonel yüzeydir!

◀

- **Logaritmik Koordinatlarda Lineer Düzlem:** $(\ln x, \ln y, \ln z)$ koordinatlarında $z = e^3 xy^2$ yüzeyi, $\ln z = \ln x + 2\ln y + 3$ afin düzlemine dönüşür.
- **Resiprokal Uzayda Afin Düzlem:** $(u, v, w) = (1/x, 1/y, 1/z)$ koordinatlarında harmonik düzlem, $w = u + \frac{1}{2}v + \frac{1}{3}$ standart düzlem denklemini sağlar.



Şekil 4.2. Farklı üreteç fonksiyonlarına göre Nevtonyen olmayan düzlem yüzeylerinin 3B Kartezyen uzaydaki karşılaştırmalı görünümü.

4.8 Genel α-Çember Tanımı ve Farklı Üreteçlerde Çember Denklemleri

Tanım 4.16. *(Genel α-Çember Tanımı ve Denklemi)*
α-Öklid uzayında sabit bir $M(x_0, y_0)$ merkez noktasına α-uzaklıkları eşit ve $r \in A^+$ olan noktaların geometrik yerine **α-çember** denir. Analitik denklemi:

$$(x -_\alpha x_0)^{2_\alpha} +_\alpha (y -_\alpha y_0)^{2_\alpha} = r^{2_\alpha}.$$

Önerme 4.17. *(1. Birim Üreteç — Klasik Öklid Çemberi)*
$\alpha(x) = x$ için klasik çıkarma ve toplama ile:

$$(x -_I x_0)^{2_I} +_I (y -_I y_0)^{2_I} = r^{2_I} \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Önerme 4.18. *(2. Üstel Üreteç — Çarpımsal Çember)*
$\alpha(x) = e^x$ için çarpımsal işlemlerle:

$$(x -_* x_0)^{2_*} +_* (y -_* y_0)^{2_*} = r^{2_*} \iff \ln^2\left(\frac{x}{x_0}\right) + \ln^2\left(\frac{y}{y_0}\right) = \ln^2 r.$$

Önerme 4.19. *(3. Kuadratik Üreteç — Kuadratik Çember)*
$\alpha(x) = \sqrt{x}$ için kuadratik işlemlerle:

$$(x -_q x_0)^{2_q} +_q (y -_q y_0)^{2_q} = r^{2_q} \iff (x^2 - x_0^2)^2 + (y^2 - y_0^2)^2 = r^4.$$

Önerme 4.20. *(4. Harmonik Üreteç — Harmonik Çember)*
$\alpha(x) = 1/x$ için harmonik işlemlerle:

$$(x -_h x_0)^{2_h} +_h (y -_h y_0)^{2_h} = r^{2_h} \iff \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right)^2 = \left(\frac{1}{r}\right)^2.$$

▶ **Parametrik Temsil ve α-Trigonometrik Karakterizasyon:** Her $\theta \in [0, 2\pi)$ için $x(\theta) = \alpha\big(\alpha^{-1}(x_0) + \alpha^{-1}(r)\cos\theta\big)$ ve $y(\theta) = \alpha\big(\alpha^{-1}(y_0) + \alpha^{-1}(r)\sin\theta\big)$ parametrizasyonu, ilgili üretecin α-çemberini kapalı ve pürüzsüz bir eğri olarak üretir.

Örnek 4.21. *(Klasik ve Çarpımsal Çember Denklemleri)*
Aşağıda klasik ve çarpımsal çember denklemleri elde edilmiştir:

Çözüm:

- **(a) Klasik Çember Formu:** $M=(2,2)$ ve $r=1$ için klasik çember:
$$(x-2)^2+(y-2)^2=1^2=1.$$
- **(b) Çarpımsal Çember Formu:** $M=(e^2,e^2)$ ve $r=e$ için çarpımsal çember:
$$(x-_*e^2)^{2_*}+_*(y-_*e^2)^{2_*}=e^{2_*}\iff \ln^2\left(\frac{x}{e^2}\right)+\ln^2\left(\frac{y}{e^2}\right)=1.$$
- **(c) Nokta Testi:** $t=0\implies x_{\text{sağ}}=e^3, y=e^2$; $t=\pi\implies x_{\text{sol}}=e, y=e^2$.

$\Delta x_{\text{sağ}}=e^2(e-1), \Delta x_{\text{sol}}=e(e-1)$ olup sağa uzama sola uzamadan tam e kat fazladır! ◀

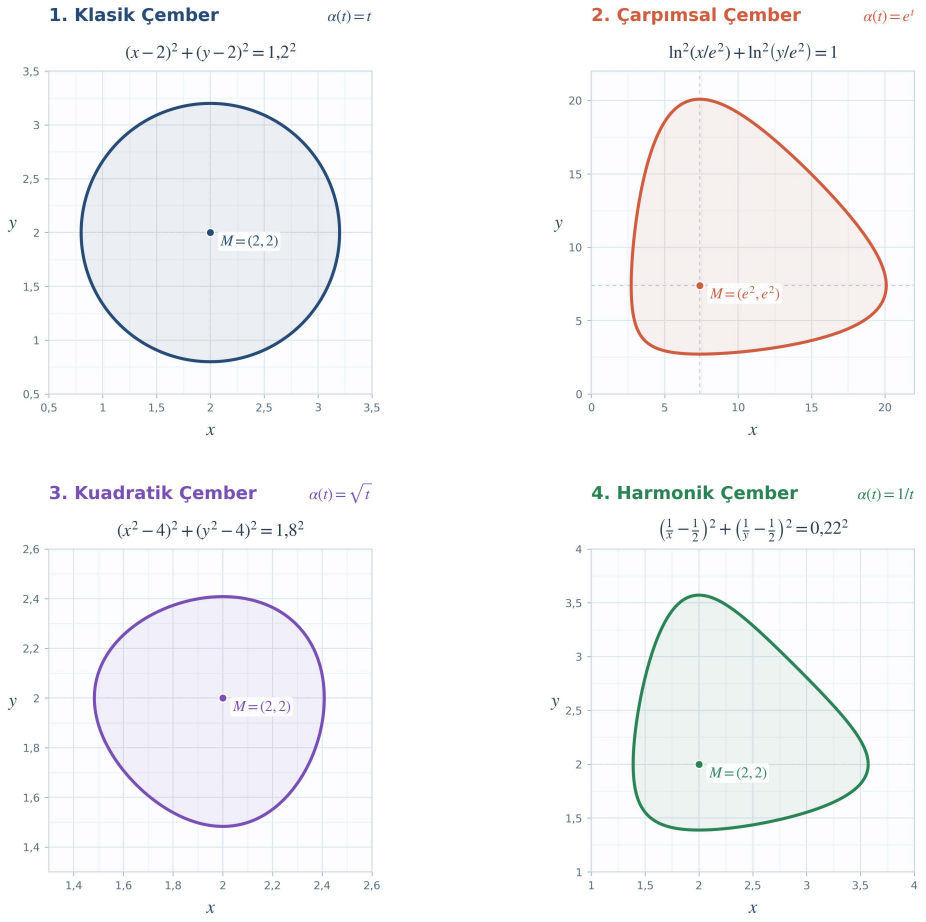
Örnek 4.22. *(Kuadratik ve Harmonik Çember Denklemleri)*
Aşağıda kuadratik ve harmonik çember denklemleri elde edilmiştir:

Çözüm:

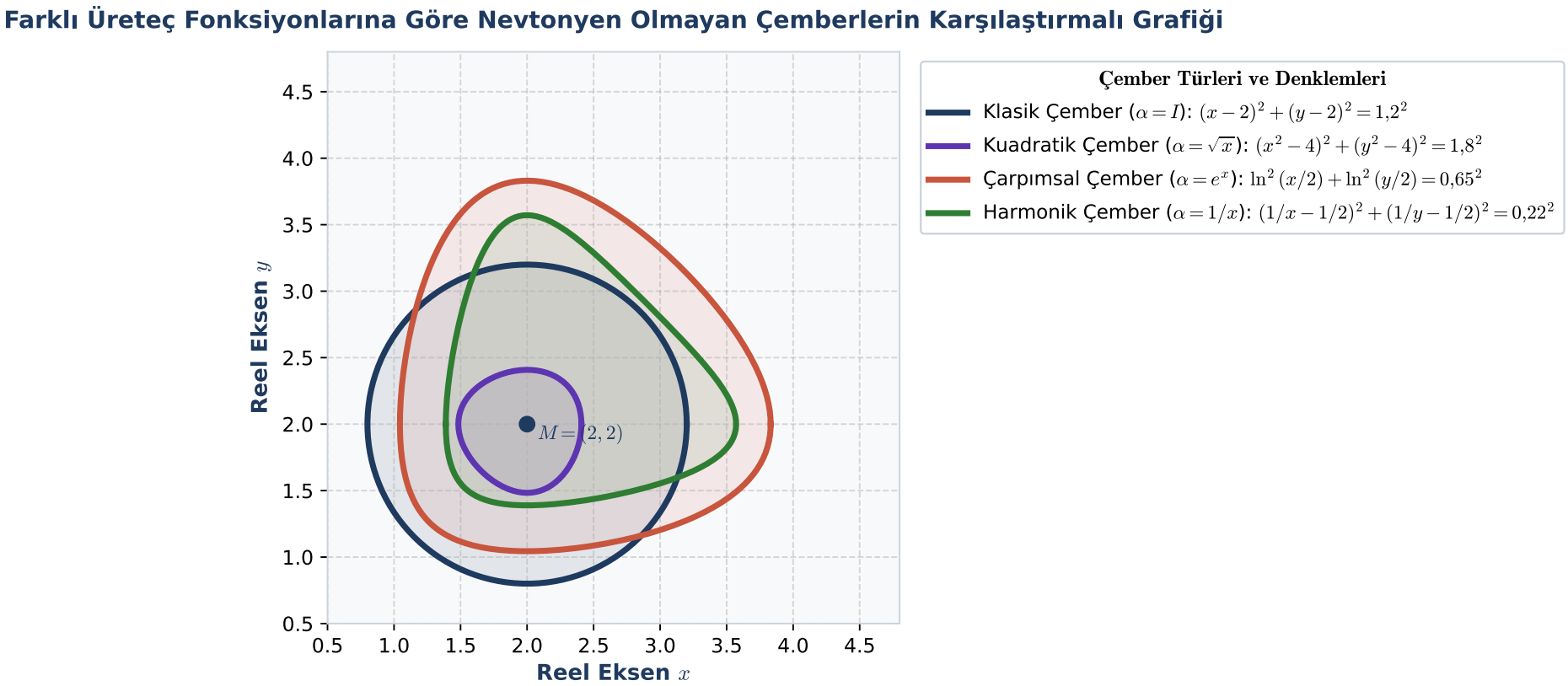
- **(a) Kuadratik Çember Formu:** $M=(2,2)$ ve $r=1$ için kuadratik çember:
$$(x-_q2)^{2_q}+_q(y-_q2)^{2_q}=1^{2_q}\iff (x^2-4)^2+(y^2-4)^2=1.$$
- **(b) Harmonik Çember Formu:** $M=(2,2)$ ve $r=1$ için harmonik çember:
$$(x-_h2)^{2_h}+_h(y-_h2)^{2_h}=1^{2_h}\iff \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\right)^2=1.$$
- **(c) Geometrik Karakter:** Kuadratik çember 4. derece Cassini ovali, harmonik çember ise asimetrik kapalı halkadır!

Her iki kapalı eğri kendi α-metriğinde sabit yarıçaplı tam bir **çemberdir**! ◀

- **Çarpımsal Çemberin Asimetrisi:** Logaritmik eksenlerde $(\ln x,\ln y)$ merkezi $(2,2)$ ve yarıçapı 1 olan kusursuz simetrik Öklid çemberi, Kartezyen düzlemde sağa ve yukarı doğru uzayan analitik bir **yumurta ovalidir**.
- **Kuadratik ve Harmonik İzometri:** $(u,v)=(x^2,y^2)$ ve $(u,v)=(1/x,1/y)$ dönüşümleri altında kuadratik ve harmonik çemberler standart Öklid çemberlerine izometrik olarak eşdeğerdir.



Şekil 4.3. Farklı üreteç fonksiyonlarına göre Nevtonyen olmayan çember formlarının Kartezyen düzlemdeki karşılaştırmalı görünümü.



Şekil 4.4. Farklı üreteç fonksiyonlarına göre Nevtonyen olmayan çemberlerin aynı koordinat sistemindeki karşılaştırmalı görünümü (çember etiketleri çerçeve dışındadır).

4.12 Genel α-Küre Tanımı ve Farklı Üreteçlerde Küre Denklemleri

Tanım 4.23. *(Genel α-Küre Tanımı ve Denklemi)*
$\mathbb{E}^3_\alpha$ uzayında sabit bir $M(x_0, y_0, z_0)$ merkez noktasına α-uzaklıkları eşit ve $r \in A^+$ olan noktaların geometrik yerine **α-küre** denir. Analitik denklemi:

$$(x -_\alpha x_0)^{2_\alpha} +_\alpha (y -_\alpha y_0)^{2_\alpha} +_\alpha (z -_\alpha z_0)^{2_\alpha} = r^{2_\alpha}.$$

Önerme 4.24. *(1. Birim Üreteç — Klasik Küre)*
$\alpha(x) = x$ için standart Öklid küresidir:

$$\sum_{i=1}^{3}(x_i -_I x_{i0})^{2_I} = r^{2_I} \iff (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2.$$

Önerme 4.25. *(2. Üstel Üreteç — Çarpımsal Küre)*
$\alpha(x) = e^x$ için **asimetrik yumurta küresidir**:

$$\sum_{i=1}^{3}(x_i -_* x_{i0})^{2_*} = r^{2_*} \iff \sum_{i=1}^{3}\ln^2\left(\frac{x_i}{x_{i0}}\right) = \ln^2 r.$$

Önerme 4.26. *(3. Kuadratik Üreteç — Kuadratik Küre)*
$\alpha(x) = \sqrt{x}$ için dördüncü dereceden yüzeydir:

$$\sum_{i=1}^{3}(x_i -_q x_{i0})^{2_q} = r^{2_q} \iff \sum_{i=1}^{3}(x_i^2 - x_{i0}^2)^2 = r^4.$$

Önerme 4.27. *(4. Harmonik Üreteç — Harmonik Küre)*
$\alpha(x) = 1/x$ için harmonik küresel yüzeydir:

$$\sum_{i=1}^{3}(x_i -_h x_{i0})^{2_h} = r^{2_h} \iff \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i0}}\right)^2 = \left(\frac{1}{r}\right)^2.$$

► **Küresel α-Koordinatlar ve İzometrik Yüzey Taşıma:** $u \in [0, 2\pi), v \in [-\pi/2, \pi/2]$ açılarıyla $x_i(u,v) = \alpha\big(\alpha^{-1}(x_{i0}) + \alpha^{-1}(r)\,\omega_i(u,v)\big)$ $(\|\boldsymbol{\omega}\| = 1)$ küresel parametrizasyonu, $\mathbb{E}^3_\alpha$ uzayındaki tüm α-küre yüzeylerini standart Öklid küresinin izometrik görüntüsü olarak inşa eder.

Örnek 4.28. *(Klasik ve Çarpımsal Küre Denklemleri)*
Aşağıda klasik ve çarpımsal küre denklemleri elde edilmiştir:

Çözüm:

- **(a) Klasik Küre Formu:** $M = (2,2,2)$ ve $r = 1$ için klasik Öklid küresi:
$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 1^2 = 1.$$
- **(b) Çarpımsal Küre Formu:** $M = (e^2, e^2, e^2)$ ve $r = e$ için çarpımsal küre:
$$\sum_{i=1}^{3} (x_i -_* e^2)^{2_*} = e^{2_*} \iff \sum_{i=1}^{3} \ln^2\left(\frac{x_i}{e^2}\right) = 1.$$
- **(c) Kutup Noktaları** $(x = e^2, y = e^2)$**:** $z_{\text{üst}} = e^3, z_{\text{alt}} = e \implies \Delta z_{\text{üst}} = e^2(e-1), \Delta z_{\text{alt}} = e(e-1)$.

$\Delta z_{\text{üst}} / \Delta z_{\text{alt}} = e$ olup üst kutba uzama alt kutuptan tam e kat fazladır! ◀

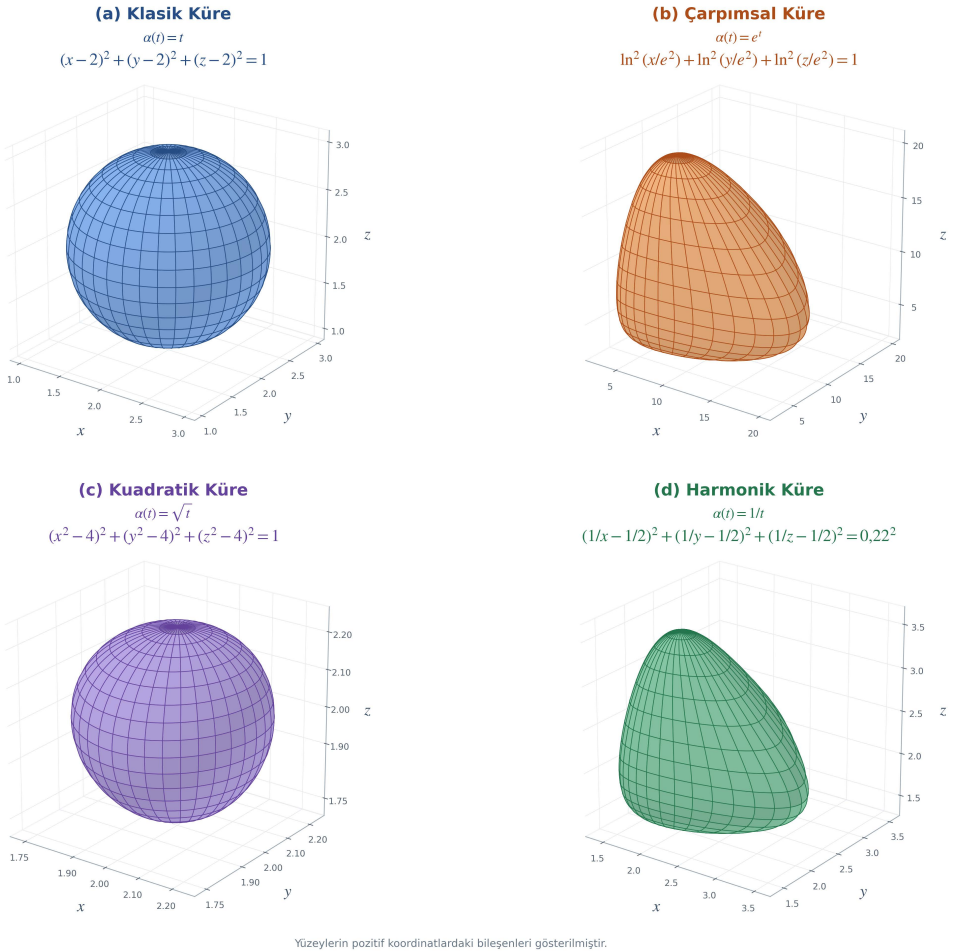
Örnek 4.29. *(Kuadratik ve Harmonik Küre Denklemleri)*
Aşağıda kuadratik ve harmonik küre denklemleri elde edilmiştir:

Çözüm:

- **(a) Kuadratik Küre Formu:** $M = (2,2,2)$ ve $r = 1$ için kuadratik küre:
$$\sum_{i=1}^{3} (x_i -_q 2)^{2_q} = 1^{2_q} \iff \sum_{i=1}^{3} (x_i^2 - 4)^2 = 1.$$
- **(b) Harmonik Küre Formu:** $M = (2,2,2)$ ve $\rho = 0{,}22$ için harmonik küre:
$$\sum_{i=1}^{3} (x_i -_h 2)^{2_h} = \rho^{2_h} \iff \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}22^2.$$
- **(c) Geometrik Karakter:** Kuadratik küre 4. derece süper-kuadrik oval, harmonik küre ise kapalı damla/çan yüzeyidir!

Her iki yüzey de kendi α-uzaylarında tam simetrik birer **küredir**! ◀

- **Çarpımsal Kürenin 3B Yumurta Geometrisi:** Logaritmik eksenlerde $(\ln x, \ln y, \ln z)$ kusursuz simetrik Öklid küresi olan yüzey, klasik Kartezyen 3B uzayda sağa, arkaya ve yukarı uzayan analitik bir **3B yumurta küresidir**.
- **Eşuzaklık Yüzeyleri:** Dereceli metrik yapısına sahip ortamlarda merkeze sabit α-uzaklıktaki noktaların geometrik yeri α-küre yüzeyleriyle temsil edilir.



Şekil 4.5. Farklı üreteç fonksiyonlarına göre Nevtonyen olmayan küre yüzeylerinin 3B Kartezyen uzaydaki karşılaştırmalı görünümü.

4.15 Genel α-Koni Tanımı ve Farklı Üreteçlerde Koni Denklemleri

Tanım 4.30. *(Genel α-Koni Yüzeyi Tanımı ve Denklemi)*
$\mathbb{E}^3_\alpha$ uzayında sabit bir tepe noktasından geçen ve tabanda sabit bir α-çemberi tarayan α-doğruların geometrik yerine **α-koni yüzeyi** denir. Tepe noktası $T(x_0, y_0, z_0)$ ve yarıçap sabiti $c \in A^+$ olan genel denklem:

$$(x -_\alpha x_0)^{2_\alpha} +_\alpha (y -_\alpha y_0)^{2_\alpha} = c^{2_\alpha} \times_\alpha (z -_\alpha z_0)^{2_\alpha}.$$

Önerme 4.31. *(1. Birim Üreteç — Klasik Koni)*
$\alpha(x) = x$ için standart Öklid dairesel konisidir:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = c^2(z - z_0)^2.$$

Önerme 4.32. *(2. Üstel Üreteç — Çarpımsal Koni)*
$\alpha(x) = e^x$ için **üstel huni (asimetrik) koni yüzeyidir**:

$$\ln^2\left(\frac{x}{x_0}\right) + \ln^2\left(\frac{y}{y_0}\right) = \ln^2 c \cdot \ln^2\left(\frac{z}{z_0}\right).$$

Önerme 4.33. *(3. Kuadratik Üreteç — Kuadratik Koni)*
$\alpha(x) = \sqrt{x}$ için dördüncü dereceden süper-kuadrik konidir:

$$(x^2 - x_0^2)^2 + (y^2 - y_0^2)^2 = c^4(z^2 - z_0^2)^2.$$

Önerme 4.34. *(4. Harmonik Üreteç — Harmonik Koni)*
$\alpha(x) = 1/x$ için harmonik bükümlü hiperbolik konidir:

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right)^2 = \left(\frac{1}{c}\right)^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right)^2.$$

► **Çift Kanatlı α-Koni ve Yatay Kesit Özelliği:** Tepe noktası $T(x_0, y_0, z_0)$'dan geçen α-doğruların ürettiği çift kanatlı α-koni yüzeyinde, $z = z_1 \neq z_0$ düzlemiyle alınan her yatay kesit merkezi (x_0, y_0) olan bir α-çemberdir. Alt $(z <_\alpha z_0)$ ve üst $(z >_\alpha z_0)$ kanatlar $\mathbb{E}^3_\alpha$ metriğinde tam simetriktir.

Örnek 4.35. *(Klasik ve Çarpımsal Koni Denklemleri)*
Aşağıda klasik ve çarpımsal çift kanatlı koni denklemleri verilmiştir:

Çözüm:

- **(a) Klasik Çift Kanatlı Koni:** Tepe noktası $T = (2,2,2)$ ve $c = 1$ için klasik koni:
$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = (z-2)^2.$$
- **(b) Çarpımsal Çift Kanatlı Koni:** Tepe noktası $T = (e^2, e^2, e^2)$ ve $c = e$ için çarpımsal koni:
$$\ln^2\left(\frac{x}{e^2}\right) + \ln^2\left(\frac{y}{e^2}\right) = \ln^2\left(\frac{z}{e^2}\right).$$
- **(c) Alt ve Üst Kanat Analizi** ($z \in [e, e^3]$)**:** $\Delta z_{\text{üst}} = e^2(e-1)$ ve $\Delta z_{\text{alt}} = e(e-1)$.

Üst kanat yüksekliği alt kanat yüksekliğinden tam e kat fazladır! ◀

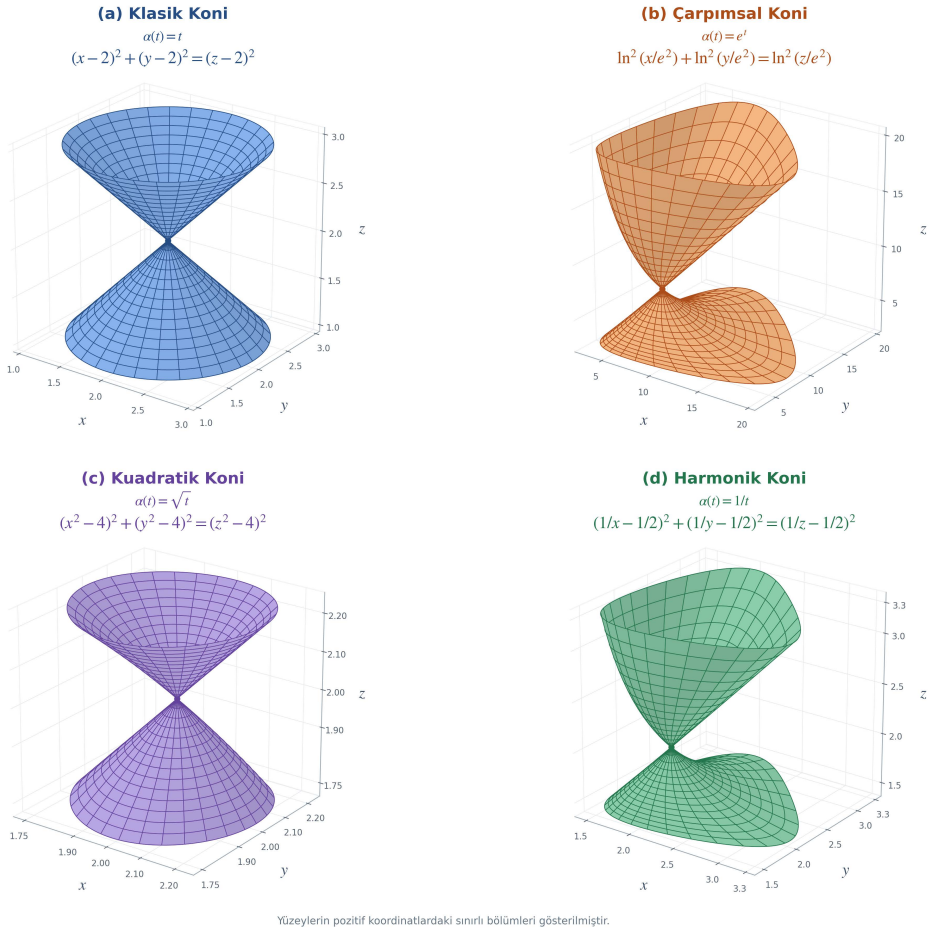
Örnek 4.36. *(Kuadratik ve Harmonik Koni Denklemleri)*
Aşağıda kuadratik ve harmonik çift kanatlı koni denklemleri verilmiştir:

Çözüm:

- **(a) Kuadratik Çift Kanatlı Koni:** Tepe noktası $T = (2,2,2)$ ve $c = 1$ için kuadratik koni:
$(x -_q 2)^{2_q} +_q (y -_q 2)^{2_q} = (z -_q 2)^{2_q} \iff (x^2-4)^2 + (y^2-4)^2 = (z^2-4)^2.$
- **(b) Harmonik Çift Kanatlı Koni:** Tepe noktası $T = (2,2,2)$ ve $c = 1$ için harmonik koni:
$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\right)^2.$$
- **(c) Geometrik Karakter:** Kuadratik koni tabanları Cassini ovali, harmonik koni ise hiperbolik çift konidir!

Her iki yüzey de kendi α-uzaylarında simetrik **çift kanatlı konidir**! ◀

- **Çarpımsal Çift Kanatlı Koninin Asimetrisi:** Logaritmik eksenlerde simetrik kum saati olan çift koni, Kartezyen uzayda üst kanadı uzun, alt kanadı basık ve tabanları yumurta çemberi olan asimetrik bir yapıdır.
- **Homojen Kuadratik Form Yapısı:** α^{-1} koordinatlarında her α-koni yüzeyi, $u^2 + v^2 - \tilde{c}^2 w^2 = 0$ standart dejenere kuadrik formuna izometrik olarak dönüşür.



Şekil 4.6. Farklı üreteç fonksiyonlarına göre Nevtonyen olmayan koni yüzeylerinin 3B Kartezyen uzaydaki karşılaştırmalı görünümü.

4.18 Trigonometrik Üreteç ($\alpha(x) = \sin x$) Altında Temel Geometrik Yapılar

Tanım 4.37. *(Trigonometrik Üreteç ($\alpha(x) = \sin x$) ve Sınırlı $\mathbb{E}^n_{\sin} = [-1,1]^n$ Uzayı)*
Esas dal $[-\pi/2, \pi/2]$ üzerinde kesin artan bijeksiyon olan $\alpha(x) = \sin x$ ($\alpha^{-1}(y) = \arcsin y$) üreteci, görüntü kümesi $A = [-1,1]$ olan sınırlı sayı sistemini ve $d_{\sin}(P,Q) = \sin\Big(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\arcsin x_i - \arcsin y_i)^2}\Big)$ metriğiyle donatılan **trigonometrik Öklid uzayını** ($\mathbb{E}^n_{\sin} = [-1,1]^n$) üretir.

Önerme 4.38. *(1. Trigonometrik Doğru (sin-Doğru))*
$\mathbb{E}^2_{\sin} = [-1,1]^2$ düzleminde $\tilde{m} = \arcsin m, \tilde{n} = \arcsin n$ için:

$$y = m \times_{\sin} x +_{\sin} n \iff y = \sin\big(\tilde{m}\arcsin x + \tilde{n}\big).$$

Önerme 4.39. *(2. Trigonometrik Düzlem (sin-Düzlem))*
$\mathbb{E}^3_{\sin} = [-1,1]^3$ uzayında $\tilde{m}_i = \arcsin m_i, \tilde{n} = \arcsin n$ için:

$$z = \sin\big(\tilde{m}_1 \arcsin x + \tilde{m}_2 \arcsin y + \tilde{n}\big).$$

Önerme 4.40. *(3. Trigonometrik Çember (sin-Çember))*
Merkezi $M(x_0, y_0)$ ve yarıçapı $r = \sin\rho$ olan sin-çember:

$$(\arcsin x - \arcsin x_0)^2 + (\arcsin y - \arcsin y_0)^2 = \rho^2.$$

Önerme 4.41. *(4. Trigonometrik Küre ve Çift Kanatlı Koni)*
$\mathbb{E}^3_{\sin}$ uzayında sin-küre ve çift kanatlı sin-koni denklemleri:

$$\sum_{i=1}^{3}(\arcsin x_i - \arcsin x_{i0})^2 = \rho^2, \quad \sum_{i=1}^{2}\arcsin^2 x_i = \tilde{c}^2 \arcsin^2 z.$$

► **Sınırlı Evren ($[-1,1]^n$) ve Periyodik Lissajous Uzantısı:** $\alpha(x) = \sin x$ üreteci tüm $\mathbb{R}^n$ uzayını $[-1,1]^n$ hiperküpünün içine sıkıştırır; esas dal dışına çıkıldığında ise $(x(t), y(t)) = (\sin t, \sin(\tilde{m}t + \tilde{n}))$ parametrizasyonu kapalı **Lissajous ve Chebyshev dalga eğrilerini** üretir.

Örnek 4.42. *(Trigonometrik Doğru, Düzlem ve Üçgen Denklemleri)*
$\alpha(x) = \sin x$ üreteci altında doğrusal yapılar:

Çözüm:

- **(a)** sin-**Doğru Formu** ($\tilde{m} = 2, \tilde{n} = 0$)**:**
$$y = \sin(2 \arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2} \quad (x \in [-1,1]).$$
Cebirsel olarak 4. derece ($y^2 = 4x^2(1-x^2)$) olan bu eğri, $\mathbb{E}^2_{\sin}$ düzleminde orijinden geçen tam bir **doğrudur**!
- **(b)** sin-**Düzlem Formu** ($\tilde{m}_1 = 1, \tilde{m}_2 = 1, \tilde{n} = 0$)**:**
$$z = \sin(\arcsin x + \arcsin y) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$
- **(c)** sin-**Üçgen:** u-v düzlemindeki doğrusal kenarların $(x, y) = (\sin u, \sin v)$ görüntüsüyle kurulan eğrisel kenarlı üçgendir.

◀

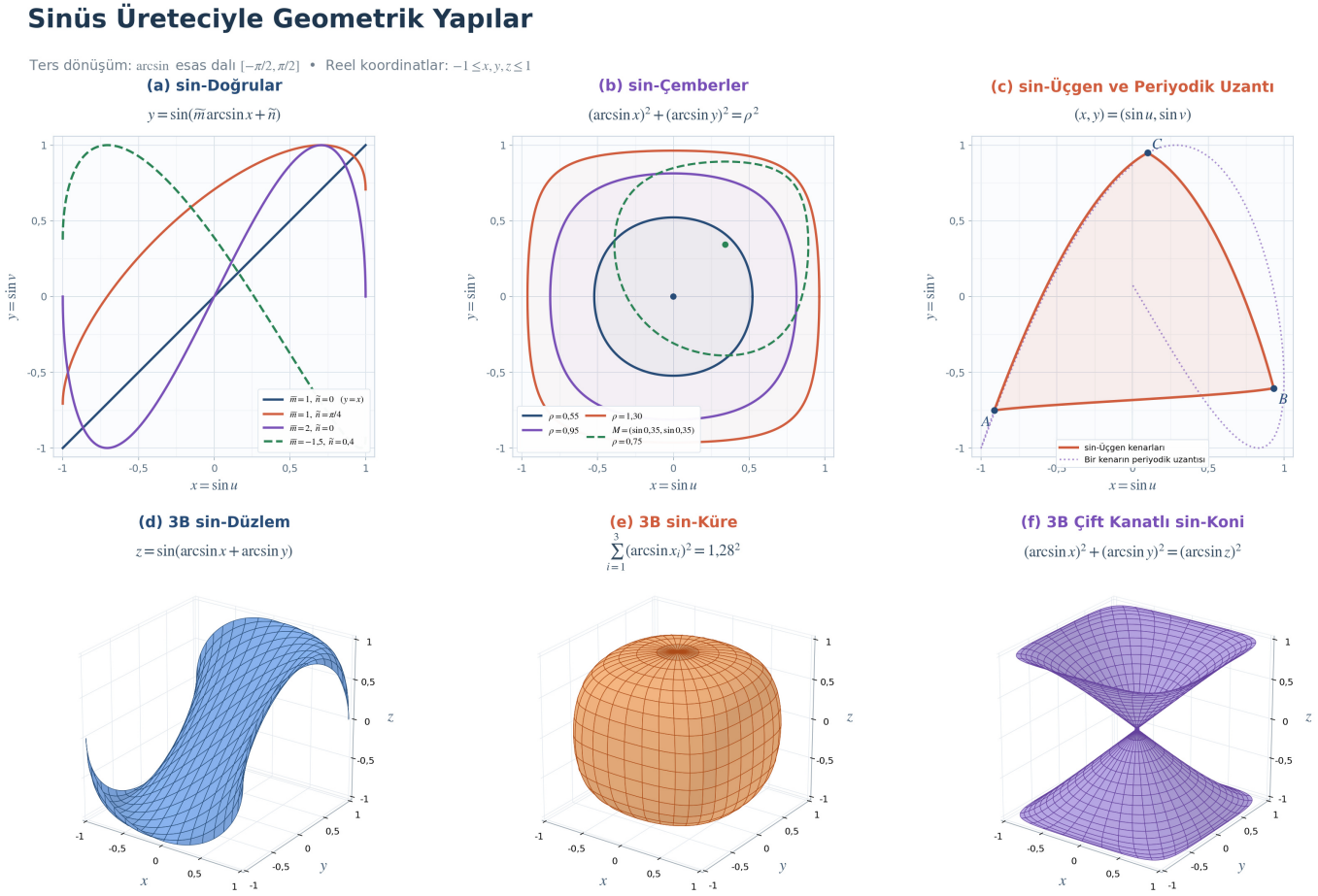
Örnek 4.43. *(Trigonometrik Çember, Küre ve Koni Denklemleri)*
$\alpha(x) = \sin x$ üreteci altında eğrisel ve yüzeysel yapılar:

Çözüm:

- **(a)** sin-**Çember Formu** ($M(0,0), r = \sin\rho$)**:**
$$\arcsin^2 x + \arcsin^2 y = \rho^2 \iff \begin{cases} x(\theta) = \sin(\rho\cos\theta), \\ y(\theta) = \sin(\rho\sin\theta). \end{cases}$$
- **(b)** sin-**Küre Formu** ($M(0,0,0), \rho = 1{,}28$)**:**
$$\arcsin^2 x + \arcsin^2 y + \arcsin^2 z = 1{,}28^2.$$
- **(c) Çift Kanatlı** sin-**Koni** ($T(0,0,0), \tilde{c} = 1$)**:**
$$\arcsin^2 x + \arcsin^2 y = \arcsin^2 z \quad (x, y, z \in [-1,1]).$$
Kenarları ± 1 sınırlarına yaklaştıkça dışa doğru açılan **çan konisi** yüzeyidir!

◀

- **Chebyshev Polinomları ile Bağlantı:** $\tilde{n} = 0$ ve $\tilde{m} = k \in \mathbb{Z}^+$ seçildiğinde sin-doğru ve cos-doğru denklemleri doğrudan $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ Chebyshev polinomlarını ve cebirsel Lissajous eğrilerini üretir.
- **Sınır Sıkışması (Yastık Geometrisi):** Yarıçap $\rho \to \pi/2$ değerine yaklaştıkça $\sin(\rho\cos\theta)$ fonksiyonu ± 1 sınırlarında düzleştiği için sin-çember ve sin-küre, $[-1,1]^n$ küpünü dolduran yuvarlatılmış bir **yastık geometrisine** dönüşür.



Şekil 4.7. $\alpha(x) = \sin x$ ($\alpha^{-1}(y) = \arcsin y$) üreteci altında $\mathbb{E}^2_{\sin} = [-1,1]^2$ ve $\mathbb{E}^3_{\sin} = [-1,1]^3$ uzaylarında oluşan (a) sin-doğrular, (b) sin-çemberler, (c) sin-üçgen, (d) 3B sin-düzlem, (e) 3B sin-küre ve (f) 3B çift kanatlı sin-koni yapıları.

5.1 Nevtonyen Olmayan Analiz: Fonksiyonlar ve Yapı Taşıma İlkesi

Klasik analiz ($\alpha = I$), yakınsamayı Öklid fark metriği $|f(x) - L|$ ile, anlık değişimi $\Delta y / \Delta x$ oranıyla ve birikimi Riemann toplamlarıyla tanımlar. Bir $\alpha : \mathbb{R} \to A$ üreteciyle kurulan $\mathbb{E}_\alpha$ uzayında ise tüm analiz süreçleri **α-aritmetiği ve d_α metriği** üzerine inşa edilir.

Tanım 5.1. *(Nevtonyen Olmayan Fonksiyon ve Geri-Çekme Dönüşümü)*

$D \subseteq A = \mathbb{R}_\alpha$ üzerinde tanımlı bir $f : D \to A$ fonksiyonunun α üreteci altındaki **klasik karşılığı (geri-çekmesi)** $\tilde{f} : \alpha^{-1}(D) \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}(u) = \big(\alpha^{-1} \circ f \circ \alpha\big)(u) = \alpha^{-1}\big(f(\alpha(u))\big) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = \alpha\Big(\tilde{f}\big(\alpha^{-1}(x)\big)\Big)$$

bağıntısıyla tanımlanır. $\alpha : (\mathbb{R}, +, \cdot, <, |\cdot|) \to (A, +_\alpha, \times_\alpha, <_\alpha, |\cdot|_\alpha)$ dönüşümü izometrik bir cisim izomorfizması olduğundan, klasik analizin temel yapı taşları $\mathbb{E}_\alpha$ uzayına eksiksiz aktarılır.

- **1. α-Limit Süreci ($\lim_{x \to_\alpha a} f(x)$):** Yakınsamayı klasik fark yerine $d_\alpha(f(x), L) = |f(x) -_\alpha L|_\alpha$ uzaklığı üzerinden ölçer.
- **2. α-Türev Süreci ($f^{(\alpha)}(x) = \frac{\mathrm{d}_\alpha f}{\mathrm{d}_\alpha x}$):** Anlık değişim hızını α-fark bölümünün α-limiti olarak belirler; α-teğet doğrusunun eğimini verir!
- **3. α-İntegral Süreci ($\int_a^{\alpha b} f(x)\, \mathrm{d}_\alpha x$):** Sonsuz küçük α-çarpımların α-toplamı olarak birikimi ölçer ve Kalkülüsün α-Temel Teoremi ile türevin tam tersi olarak işler.

5.2 Genel α-Limit Tanımı ve Farklı Üreteçlerde Limit Bağıntıları

Tanım 5.2. *(Genel α-Limit ve α-Süreklilik)*
$f : D \subseteq A \to A$ fonksiyonu ve $a \in A$ yığılma noktası için; her $\varepsilon >_\alpha 0_\alpha$ sayısına karşılık $0_\alpha <_\alpha |x -_\alpha a|_\alpha <_\alpha \delta$ iken $|f(x) -_\alpha L|_\alpha <_\alpha \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta >_\alpha 0_\alpha$ bulunabiliyorsa $L \in A$ sayısına f'nin a noktasındaki **α-limiti** denir:

$$\lim_{x \to_\alpha a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a} d_\alpha\big(f(x), L\big) = 0_\alpha \iff L = \alpha\Big(\lim_{x \to a} \alpha^{-1}\big(f(x)\big)\Big).$$

Önerme 5.3. *(1. Birim Üreteç — Klasik Limit)*
$\alpha(x) = x$ için $d_I(f(x), L) = |f(x) - L|$ metriğinde:

$$\lim_{x \to_I a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Önerme 5.4. *(2. Üstel Üreteç — Çarpımsal Limit)*
$\alpha(x) = e^x$ için $d_*(f(x), L) = e^{|\ln(f(x)/L)|}$ metriğinde:

$$\lim_{x \to_* a} f(x) = \exp\Big(\lim_{x \to a} \ln f(x)\Big) = L \iff \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{L} = 1.$$

Önerme 5.5. *(3. Kuadratik Üreteç — Kuadratik Limit)*
$\alpha(x) = \sqrt{x}$ için $d_q(f(x), L) = \sqrt{|f^2(x) - L^2|}$ metriğinde:

$$\lim_{x \to_q a} f(x) = \sqrt{\lim_{x \to a} \big(f(x)\big)^2} = L.$$

Önerme 5.6. *(4. Harmonik Üreteç — Harmonik Limit)*
$\alpha(x) = 1/x$ için $d_h(f(x), L) = \frac{|f(x)L|}{|f(x)-L|}$ metriğinde:

$$\lim_{x \to_h a} f(x) = \left(\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)}\right)^{-1} = L \iff \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}.$$

► **α-Limit Cebiri ve α-Süreklilik:** $\lim_{x \to_\alpha a} f(x) = L_1$ ve $\lim_{x \to_\alpha a} g(x) = L_2$ ise her $\star_\alpha \in \{+_\alpha, -_\alpha, \times_\alpha, /_\alpha\}$ işlemi için $\lim_{x \to_\alpha a}\big(f(x) \star_\alpha g(x)\big) = L_1 \star_\alpha L_2$ eşitliği sağlanır. Özel olarak $\lim_{x \to_\alpha a} f(x) = f(a)$ ise f fonksiyonu a noktasında **α-süreklidir**.

Örnek 5.7. *(Klasik ve Çarpımsal Limitler)*

1. Klasik $0/0$ **Belirsizliği:**

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=\mathbf{6}.$$

2. Çarpımsal $1/_*1$ **Belirsizliği** $(x\to_* e^2)$**:**

$$\frac{x^{2_*}-_* e^4}{x-_* e^2}=x+_* e^2=e^2x.$$

Limit alındığında çarpımsal sonuç bulunur:

$$\lim_{x\to_* e^2}(e^2x)=e^2\cdot e^2=\mathbf{e^4}.$$

Örnek 5.8. *(Kuadratik ve Harmonik Limitler)*

3. Kuadratik $0_q/_q0_q$ **Belirsizliği** $(x\to_q 3)$**:**

$$\frac{x^{2_q}-_q 3^{2_q}}{x-_q 3}=\sqrt{\frac{x^4-81}{x^2-9}}=\sqrt{x^2+9}.$$

Kuadratik limit değeri doğrudan elde edilir:

$$\lim_{x\to_q 3}\sqrt{x^2+9}=\sqrt{18}=\mathbf{3\sqrt{2}}.$$

4. Harmonik Doğru Limiti $(f(x)=\frac{2x}{2x+1})$**:**

$$\lim_{x\to_h 2}f(x)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)^{-1}=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}.$$

► **Belirsizliklerin Yapısal Benzerliği:** Klasik analizde $x\to 3$ için sonuç $\mathbf{6}=2\times_I 3$ çıkarken; çarpımsal analizde $x\to_* e^2$ için sonuç $\mathbf{e^4}=2_*\times_* e^2$ çıkar. Her sistemde $0_\alpha/_\alpha 0_\alpha$ belirsizliğini iki kare farkı çözer!

5.4 Genel α-Ara Değer Teoremi ve Farklı Üreteçlerdeki Önermeleri

Teorem 5.9. *(Genel α-Ara Değer (Bolzano) Teoremi)*
$\alpha : \mathbb{R} \to A$ sürekli ve kesin artan bir üreteç fonksiyonu olsun. $f : [a,b]_\alpha \to A$ fonksiyonu α-sürekli ve uç noktalarda zıt α-işaretli ise, yani

$$f(a) \times_\alpha f(b) <_\alpha 0_\alpha$$

koşulu sağlanıyorsa; $f(c) = 0_\alpha$ olacak biçimde en az bir $c \in (a,b)_\alpha$ noktası vardır.

Önerme 5.10. *(1. Birim Üreteç — Klasik Ara Değer Teoremi)*
$\alpha(x) = x$ için $0_I = 0$ olduğundan:

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \implies \exists c \in (a,b) : \ f(c) = 0.$$

Grafiğin x-eksenini kestiği **klasik kökü** garanti eder.

Önerme 5.11. *(2. Üstel Üreteç — Çarpımsal Ara Değer Teoremi)*
$\alpha(x) = e^x$ için $0_* = 1$ olduğundan $\ln f(a) \ln f(b) < 0$ iken:

$$\exists c \in (a,b)_* : \ \mathbf{f(c) = 1 = 0_*}.$$

$f(c) = 0$ kökünü değil, $f(c) = 1$ **denge noktasını** garanti eder!

Önerme 5.12. *(3. Kuadratik Üreteç — Kuadratik Ara Değer)*
$\alpha(x) = \sqrt{x}$ için karesel genlik düzeyinde:

$$\operatorname{sgn}(f(a))f^2(a) \cdot \operatorname{sgn}(f(b))f^2(b) < 0 \implies f(c) = 0_q = 0.$$

Karesel enerji/güç seviyesinde sıfır geçişini garanti eder.

Önerme 5.13. *(4. Harmonik Üreteç — Harmonik Ara Değer)*
$\alpha(x) = 1/x$ için resiprokal düzeyde:

$$\frac{1}{f(a)} \cdot \frac{1}{f(b)} < 0 \implies \exists c \in (a,b)_h : \ \frac{1}{f(c)} = 0.$$

$0 \notin \mathbb{R}_h$ olduğundan 0'ı içeren aralıklarda **bozulur**!

► **Yeni Uzayda Ara Değer Teoreminin Anlamı:** Klasik analizde Ara Değer Teoremi niceliğin yok olduğu anı ($f(c) = 0$) yakalarken; çarpımsal analizde büyüme çarpanının 1 olduğu (ne büyüme ne küçülmenin yaşandığı başabaş denge anını) tespit eder.

Tanım 5.14. *(Genel α-Türev ve α-Diferansiyellenebilirlik)*

$f : D \subseteq A \to A$ fonksiyonunun $x \in D$ noktasındaki **α-türevi** ($f^{(\alpha)}(x)$ veya $\frac{\mathrm{d}_\alpha f}{\mathrm{d}_\alpha x}$), α-fark bölümünün $t \to_\alpha x$ iken α-limiti olarak tanımlanır:

$$f^{(\alpha)}(x) = \frac{\mathrm{d}_\alpha f}{\mathrm{d}_\alpha x} = \lim_{t \to_\alpha x} \big(f(t) -_\alpha f(x)\big) /_\alpha (t -_\alpha x) = \alpha\left(\frac{\mathrm{d}\big(\alpha^{-1}(f(x))\big)}{\mathrm{d}\big(\alpha^{-1}(x)\big)}\right) = \alpha\left(\frac{(\alpha^{-1})'(f(x))}{(\alpha^{-1})'(x)}\, f'(x)\right).$$

Önerme 5.15. *(1. Birim Üreteç — Klasik Türev)*

$\alpha(x) = x$ $(\alpha^{-1}(y) = y)$ için standart Nevton–Leibniz türevidir:

$$f^{(I)}(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'(x).$$

Önerme 5.16. *(2. Üstel Üreteç — Çarpımsal Türev)*

$\alpha(x) = e^x$ $(\alpha^{-1}(y) = \ln y)$ için $\mathbb{E}_*$ çarpımsal türevi:

$$f^*(x) = \lim_{h \to 1} \left(\frac{f(xh)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{\ln h}} = \exp\left(\frac{x\, f'(x)}{f(x)}\right) = e^{x(\ln f(x))'}.$$

Önerme 5.17. *(3. Kuadratik Üreteç — Kuadratik Türev)*

$\alpha(x) = \sqrt{x}$ $(\alpha^{-1}(y) = y^2)$ için $\mathbb{E}_q$ kuadratik türevi:

$$f^{(q)}(x) = \sqrt{\frac{\mathrm{d}\big(f^2(x)\big)}{\mathrm{d}(x^2)}} = \sqrt{\frac{f(x)\, f'(x)}{x}}.$$

Önerme 5.18. *(4. Harmonik Üreteç — Harmonik Türev)*

$\alpha(x) = 1/x$ $(\alpha^{-1}(y) = 1/y)$ için $\mathbb{E}_h$ harmonik türevi:

$$f^{(h)}(x) = \left(\frac{\mathrm{d}(1/f(x))}{\mathrm{d}(1/x)}\right)^{-1} = \frac{f^2(x)}{x^2\, f'(x)}.$$

▶ **α-Türev Kuralları (Toplam, α-Leibniz Çarpım ve α-Zincir Kuralı):** Her α-türev operatörü kendi aritmetiğinde doğrusal ve Leibniz kuralıyla uyumludur: $(f \pm_\alpha g)^{(\alpha)} = f^{(\alpha)} \pm_\alpha g^{(\alpha)}$, $(f \times_\alpha g)^{(\alpha)} = f^{(\alpha)} \times_\alpha g +_\alpha f \times_\alpha g^{(\alpha)}$ ve $(g \circ f)^{(\alpha)}(x) = g^{(\alpha)}(f(x)) \times_\alpha f^{(\alpha)}(x)$.

Örnek 5.19. *(Klasik ve Çarpımsal Türevler)*

1. Klasik Doğru: $f(x) = 2x + 1$

$$f^{(I)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x+1) = \mathbf{2} = m \quad \text{(sabit)}.$$

2. Çarpımsal Doğru: $f(x) = e \cdot x^2 \quad (m = e^2, n = e)$

$$f^*(x) = \exp\left(\frac{x \cdot 2ex}{ex^2}\right) = \exp(2) = \mathbf{e^2} = m.$$

3. Çarpımsal Kare: $g(x) = x^{2_*} = e^{\ln^2 x}$

$$g^*(x) = \exp\left(\frac{x \cdot \frac{2\ln x}{x} e^{\ln^2 x}}{e^{\ln^2 x}}\right) = e^{2\ln x} = \mathbf{2}_* \times_* \mathbf{x}.$$

Örnek 5.20. *(Kuadratik ve Harmonik Türevler)*

4. Kuadratik Doğru: $f(x) = \sqrt{4x^2+1} \quad (m = 2)$

$$f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}} \implies f(x)f'(x) = 4x.$$

Kuadratik türev formülünden sabit eğim elde edilir:

$$f^{(q)}(x) = \sqrt{\frac{4x}{x}} = \sqrt{4} = \mathbf{2} = m.$$

5. Harmonik Doğru: $f(x) = \frac{2x}{2x+1} \quad (m = 2)$

$$f^{(h)}(x) = \frac{\left(\frac{2x}{2x+1}\right)^2}{x^2 \cdot \frac{2}{(2x+1)^2}} = \frac{4x^2}{2x^2} = \mathbf{2} = m.$$

► **Bölüm 4 ve Bölüm 5 Sentezi (Sabit α-Eğim = Sabit α-Türev):** Bölüm 4'te tanımlanan dört doğrunun ($2x+1$, ex^2, $\sqrt{4x^2+1}$, $\frac{2x}{2x+1}$) klasik türevleri değişkenken, kendi doğal α-türevleri her noktada sabit α-eğime ($\mathbf{2}, \mathbf{e^2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}$) eşittir!

5.7 Genel α-Ortalama Değer Teoremi ve Farklı Üreteç Önermeleri

Teorem 5.21. *(Genel α-Lagrange Ortalama Değer ve α-Fermat Teoremleri)*
$[a,b]_\alpha$ üzerinde α-sürekli ve $(a,b)_\alpha$ üzerinde α-türevlenebilir bir f fonksiyonu için:

1. **α-Fermat Teoremi:** $c \in (a,b)_\alpha$ yerel α-ekstremum noktası ise $f^{(\alpha)}(c) = 0_\alpha$'dır.
2. **α-Lagrange Ortalama Değer Teoremi (α-ODT):** En az bir $c \in (a,b)_\alpha$ α-noktasında anlık α-türev, uç noktaları birleştiren α-kirişin α-eğimine eşittir:

$$f^{(\alpha)}(c) = \big(f(b) -_\alpha f(a)\big) /_\alpha (b -_\alpha a) \quad \Longleftrightarrow \quad f(b) -_\alpha f(a) = f^{(\alpha)}(c) \times_\alpha (b -_\alpha a).$$

Önerme 5.22. *(1. Birim Üreteç — Klasik ODT)*
$\alpha(x) = x$ için klasik diferansiyel hesaptır:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ekstremum noktasında $f'(c) = 0_I = 0$ olur.

Önerme 5.23. *(2. Üstel Üreteç — Çarpımsal ODT)*
$\alpha(x) = e^x$ için geometrik değişim hızıdır:

$$f^*(c) = \left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{\ln(b/a)}}.$$

Ekstremum noktasında $f^*(c) = 1 = 0_*$ olur!

Önerme 5.24. *(3. Kuadratik Üreteç — Kuadratik ODT)*
$\alpha(x) = \sqrt{x}$ için karesel değişim oranıdır:

$$f^{(q)}(c) = \sqrt{\frac{f^2(b) - f^2(a)}{b^2 - a^2}}.$$

Karesel enerji/güç değişim hızını yakalar.

Önerme 5.25. *(4. Harmonik Üreteç — Harmonik ODT)*
$\alpha(x) = 1/x$ için resiprokal değişim oranıdır:

$$f^{(h)}(c) = \frac{1/b - 1/a}{1/f(b) - 1/f(a)}.$$

Direnç ve iletkenlik değişim hızını yakalar.

▶ **Fermat Teoreminin Çarpımsal Sırrı ($f^*(c) = 1$):** Klasik analizde ekstremumda eğim 0 olurken; çarpımsal analizde büyüme çarpanı $1 = 0_*$ olur. Bu durum büyümenin durup küçülmeye geçtiği anlık çarpanın 1 olduğunu açıklar!

Örnek 5.26. *(Klasik ve Çarpımsal ODT ($f(x)=x^2$))*

1. Klasik ODT ($f(x)=x^2$, $[a,b]$):

$$f'(c) = 2c = \frac{b^2-a^2}{b-a} = b+a$$

$$\Longrightarrow \mathbf{c = \frac{a+b}{2}} \quad (\textbf{Aritmetik Ortalama}).$$

2. Çarpımsal ODT ($f(x)=x^{2_*}=e^{\ln^2 x}$):

$$e^{2\ln c} = \left(\frac{e^{\ln^2 b}}{e^{\ln^2 a}}\right)^{\frac{1}{\ln(b/a)}} = e^{\ln b+\ln a}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{c = \sqrt{ab}} \quad (\textbf{Geometrik Ortalama}).$$

Örnek 5.27. *(Kuadratik ve Harmonik ODT ($f(x)=x^2$))*

3. Kuadratik ODT ($f(x)=x^2$, $[a,b]$):

$$\sqrt{2}\,c = \sqrt{\frac{b^4-a^4}{b^2-a^2}} = \sqrt{b^2+a^2}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}} \quad (\textbf{Kuadratik / RMS}).$$

4. Harmonik ODT ($f(x)=x^2$, $[a,b]$):

$$\frac{c}{2} = \frac{1/b-1/a}{1/b^2-1/a^2} = \frac{ab}{a+b}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{c = \frac{2ab}{a+b}} \quad (\textbf{Harmonik Ortalama}).$$

► **Analitik Mucize (Dört Ortalama = Dört Üreteçte Lagrange ODT):** Cebir derslerinde birbirinden bağımsız tanımlanan Aritmetik ($\frac{a+b}{2}$), Geometrik ($\sqrt{ab}$), Kuadratik ($\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$) ve Harmonik ($\frac{2ab}{a+b}$) ortalamalar; aslında tek bir **Lagrange α-Ortalama Değer Teoreminin** $f(x)=x^{2_\alpha}$ fonksiyonu üzerindeki doğal görünümleridir!

Tanım 5.28. *(Genel α-Teğet Doğrusu Denklemi)*

$\mathbb{E}_\alpha$ düzleminde $y = f(x)$ eğrisine $P_0(x_0, y_0)$ noktasında teğet olan α-doğrunun eğimi α-türeve ($m_\alpha = f^{(\alpha)}(x_0)$) eşittir. Genel α-teğet doğrusu denklemi:

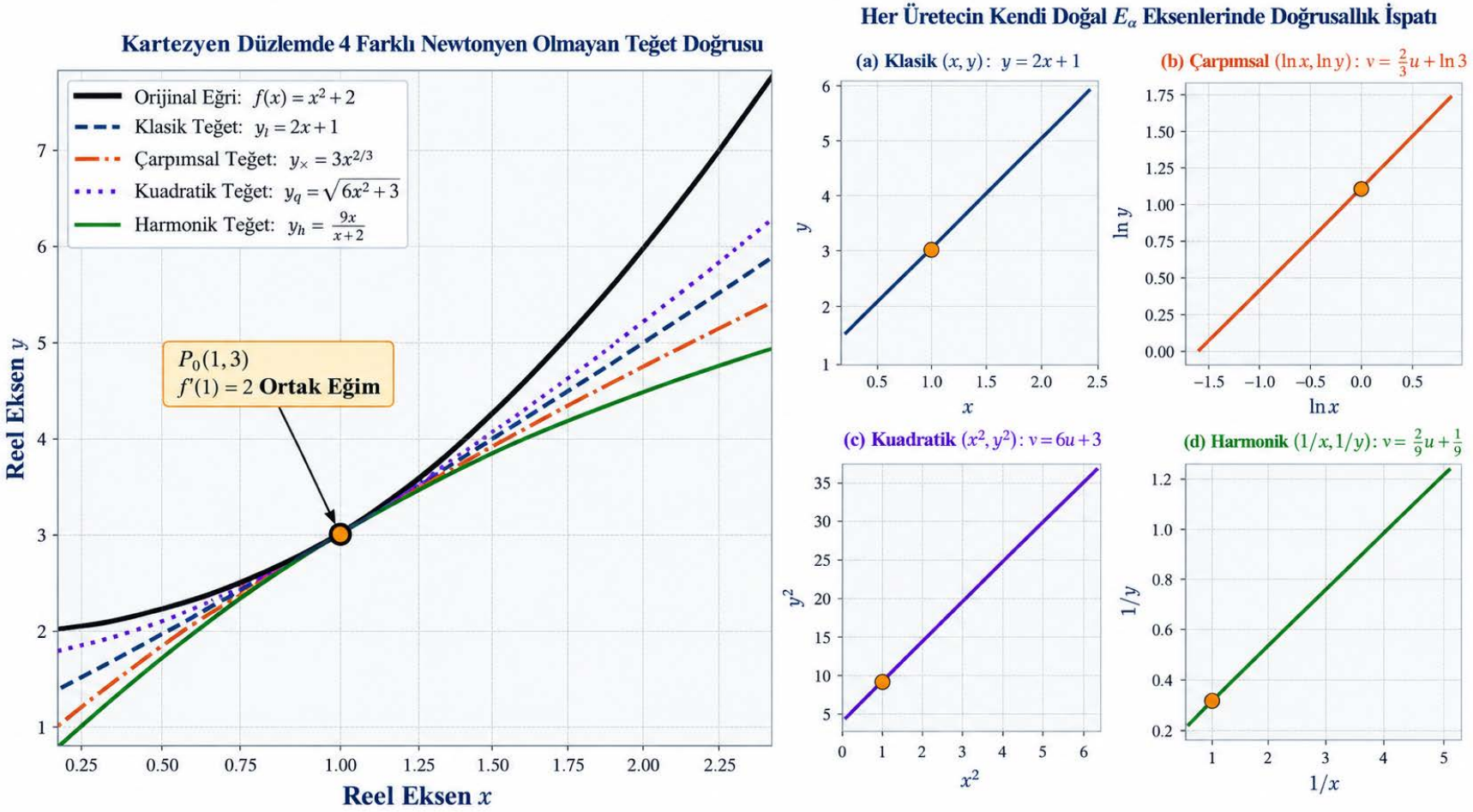
$$y -_\alpha y_0 = f^{(\alpha)}(x_0) \times_\alpha (x -_\alpha x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^{-1}(y) - \alpha^{-1}(y_0) = \alpha^{-1}\big(f^{(\alpha)}(x_0)\big)\,\big(\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(x_0)\big).$$

Örnek 5.29. *($f(x) = x^2 + 2$ Eğrisine $P_0(1,3)$ Noktasında Çizilen 4 Farklı α-Teğet Doğrusu)*

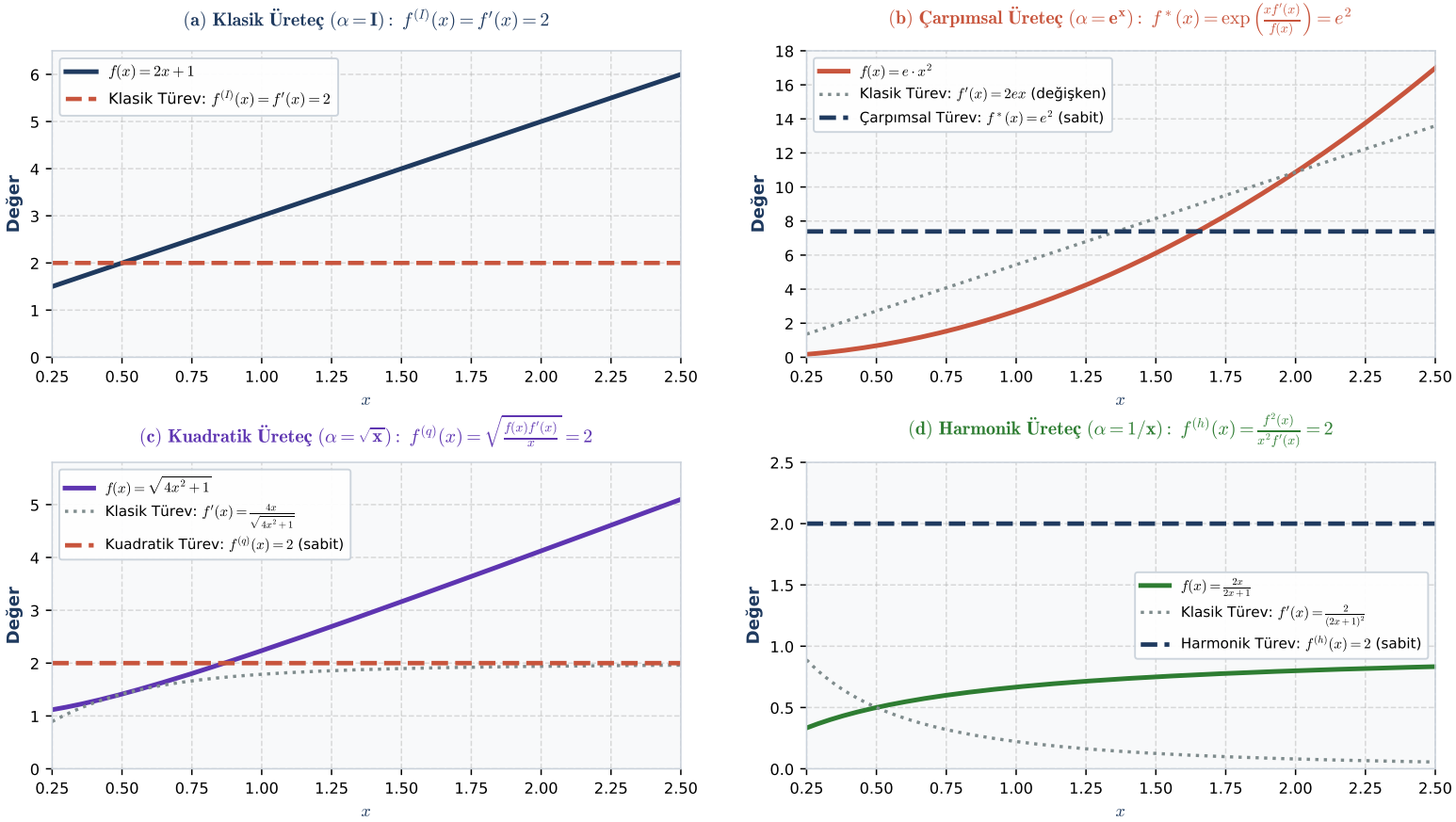
$f(x) = x^2 + 2$ eğrisinin $x_0 = 1$ noktasındaki değeri $y_0 = 3$ ve ortak klasik eğimi $f'(1) = 2$'dir.

- **1. Klasik Teğet Doğrusu** ($\alpha = x$)**:** $m_I = f'(1) = 2 \implies y - 3 = 2(x-1) \implies \mathbf{y_I(x) = 2x + 1}$ (Afin düz doğru).
- **2. Çarpımsal Teğet Doğrusu** ($\alpha = e^x$)**:** $k = \frac{x_0 f'(x_0)}{f(x_0)} = \frac{1\cdot 2}{3} = \frac{2}{3} \implies \mathbf{y_*(x) = 3x^{2/3}}$ (Kuvvet eğrisi; $\ln x$–$\ln y$'de düz doğru!).
- **3. Kuadratik Teğet Doğrusu** ($\alpha = \sqrt{x}$)**:** $m_q^2 = \frac{y_0 f'(x_0)}{x_0} = \frac{3\cdot 2}{1} = 6 \implies \mathbf{y_q(x) = \sqrt{6x^2 + 3}}$ (Hiperbol kolu; x^2–y^2'de düz doğru!).
- **4. Harmonik Teğet Doğrusu** ($\alpha = 1/x$)**:** $m_h^{-1} = \frac{x_0^2 f'(x_0)}{y_0^2} = \frac{2}{9} \implies \mathbf{y_h(x) = \frac{9x}{x+2}}$ (Doygunluk eğrisi; $1/x$–$1/y$'de düz doğru!).

► **Geometrik Değme Karakteri:** Dört teğetin tamamı $P_0(1,3)$ noktasından geçer ve bu noktada aynı $f'(1) = 2$ teğet eğimine sahiptir; ancak kendi $\mathbb{E}_\alpha$ dünyalarında tam birer **düz doğrudur**!



Şekil 5.2. $f(x) = x^2 + 2$ eğrisine $P_0(1,3)$ noktasında çizilen 4 farklı Nevtonyen olmayan teğet doğrusunun standart Kartezyen uzaydaki (sol) ve her üretecin kendi doğal $\mathbb{E}_\alpha$ koordinat sistemindeki (sağ) görünümleri.



Şekil 5.1. Bölüm 4'teki dört α-doğru fonksiyonunun ($2x + 1$, ex^2, $\sqrt{4x^2 + 1}$, $\frac{2x}{2x+1}$) klasik türevleri (noktalı eğriler) ile kendi doğal α-türevlerinin (kesikli yatay doğrular: sabit α-eğim!) karşılaştırmalı görünümü.

5.12 Genel α-İntegral Tanımı ve Farklı Üreteçlerde İntegral Operatörleri

Tanım 5.30. *(Genel α-Belirli İntegral ve α-Riemann Toplamı)*
$[a,b] \subseteq A$ aralığının bir $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ parçalanması için $\Delta_\alpha x_i = x_i -_\alpha x_{i-1}$ olmak üzere, α-Riemann toplamlarının α-limitine f fonksiyonunun $[a,b]$ üzerindeki **α-belirli integrali** denir:

$$\int_a^{\alpha b} f(x)\,\mathrm{d}_\alpha x = \lim_{\max \Delta_\alpha x_i \to_\alpha 0_\alpha} \sum_{i=1}^{n}{}_\alpha\, f(\xi_i) \times_\alpha \Delta_\alpha x_i = \alpha\left(\int_a^b \alpha^{-1}\big(f(x)\big)\cdot(\alpha^{-1})'(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Önerme 5.31. *(1. Birim Üreteç — Klasik Riemann İntegrali)*
$\alpha(x) = x$ $(\mathrm{d}_I x = \mathrm{d}x)$ için klasik belirli integraldir:

$$\int_a^{Ib} f(x)\,\mathrm{d}_I x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Önerme 5.32. *(2. Üstel Üreteç — Çarpımsal İntegral)*
$\alpha(x) = e^x$ $(\alpha^{-1}(y) = \ln y)$ için çarpımsal belirli integral:

$$\int_a^{*b} f(x)\,\mathrm{d}_* x = \exp\left(\int_a^b \ln f(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{x}\right) = \frac{F(b)}{F(a)}.$$

Önerme 5.33. *(3. Kuadratik Üreteç — Kuadratik İntegral)*
$\alpha(x) = \sqrt{x}$ $(\alpha^{-1}(y) = y^2)$ için kuadratik belirli integral:

$$\int_a^{qb} f(x)\,\mathrm{d}_q x = \sqrt{\int_a^b 2x\,\big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x} = \sqrt{F^2(b) - F^2(a)}.$$

Önerme 5.34. *(4. Harmonik Üreteç — Harmonik İntegral)*
$\alpha(x) = 1/x$ $(\alpha^{-1}(y) = 1/y)$ için harmonik belirli integral:

$$\int_a^{hb} f(x)\,\mathrm{d}_h x = \left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-1} = F(b) -_h F(a).$$

▶ **Kalkülüsün α-Temel Teoremi:** $F^{(\alpha)}(x) = f(x)$ (α-ilkel fonksiyon) olmak üzere her $[a,b] \subseteq A$ aralığında $\frac{\mathrm{d}_\alpha}{\mathrm{d}_\alpha x}\left(\int_a^{\alpha x} f(t)\,\mathrm{d}_\alpha t\right) = f(x)$ ve $\int_a^{\alpha b} F^{(\alpha)}(x)\,\mathrm{d}_\alpha x = F(b) -_\alpha F(a)$ bağıntıları sağlanır.

Örnek 5.35. *(Klasik ve Çarpımsal İntegraller)*

1. Klasik Belirli İntegral ($f(x) = 2x,\ [1,2]$)**:**

$$\int_1^{I\,2} 2x\,\mathrm{d}_I x = \int_1^2 2x\,\mathrm{d}x = \left[x^2\right]_1^2 = 4 - 1 = \mathbf{3}.$$

2. Çarpımsal İntegral ($f(x) = x^2,\ [1,e]$)**:**

$$\int_1^{*e} x^2\,\mathrm{d}_* x = \exp\left(\int_1^e \frac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \exp(1) = \mathbf{e}.$$

Sağlama: $F(e) -_* F(1) = \frac{e^1}{e^0} = \mathbf{e}$.

Örnek 5.36. *(Kuadratik ve Harmonik İntegraller)*

3. Kuadratik İntegral ($f(x) = \sqrt{2}\,x,\ [1,2]$)**:**

$$\int_1^{q\,2} \sqrt{2}\,x\,\mathrm{d}_q x = \sqrt{\int_1^2 4x^3\,\mathrm{d}x} = \sqrt{16-1} = \sqrt{\mathbf{15}}.$$

4. Harmonik İntegral ($f(x) = \frac{x}{2},\ [2,1]$)**:**

$$\int_2^{h\,1} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}_h x = \left(\int_{1/2}^1 2u\,\mathrm{d}u\right)^{-1} = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{-1} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}.$$

Sağlama: $F(1) -_h F(2) = 1 -_h 4 = \frac{4}{3}$.

► **Kalkülüsün Temel Teoreminin Evrenselliği:** Dört üretecin tamamında belirli integral, ilkel fonksiyonun uç noktalardaki α-farkına $(F(b) -_\alpha F(a))$ kesinlikle eşittir ve klasik $\int u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2$ integralinin izomorfik görüntüleridir $(\mathbf{3}, \mathbf{e}, \sqrt{\mathbf{15}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}})$!

5.14 İntegral α-Ortalama Değer Teoremi ve Farklı Üreteç Önermeleri

Teorem 5.37. *(İntegral İçin Genel α-Ortalama Değer Teoremi)*
$[a,b]_\alpha$ üzerinde α-sürekli bir f fonksiyonu için en az bir $c \in [a,b]_\alpha$ noktasında fonksiyonun aldığı değer kendi **α-integral ortalamasına** ($\mu_\alpha(f)$) eşittir:

$$\mu_\alpha(f) = \left(1_\alpha /_\alpha (b -_\alpha a)\right) \times_\alpha \int_a^{\alpha b} f(x)\, \mathrm{d}_\alpha x = \alpha\left(\frac{1}{\alpha^{-1}(b) - \alpha^{-1}(a)} \int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} \alpha^{-1}(f(\alpha(u)))\, \mathrm{d}u\right) = f(c).$$

Önerme 5.38. *(1. Birim Üreteç — Aritmetik Ortalama)*
$\alpha(x) = x$ için klasik integral ortalamasıdır:

$$\mu_I(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c).$$

Fonksiyonun **Aritmetik Ortalamasını** üretir.

Önerme 5.39. *(2. Üstel Üreteç — Geometrik Ortalama)*
$\alpha(x) = e^x$ için çarpımsal integral ortalamasıdır:

$$\mu_*(f) = \exp\left(\frac{1}{\ln(b/a)}\int_a^b \ln f(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{x}\right) = f(c).$$

Fonksiyonun **Geometrik Ortalamasını** üretir.

Önerme 5.40. *(3. Kuadratik Üreteç — Kareli (RMS) Ortalama)*
$\alpha(x) = \sqrt{x}$ için kuadratik integral ortalamasıdır:

$$\mu_q(f) = \sqrt{\frac{1}{b^2-a^2}\int_a^b 2x\, f^2(x)\,\mathrm{d}x} = f(c).$$

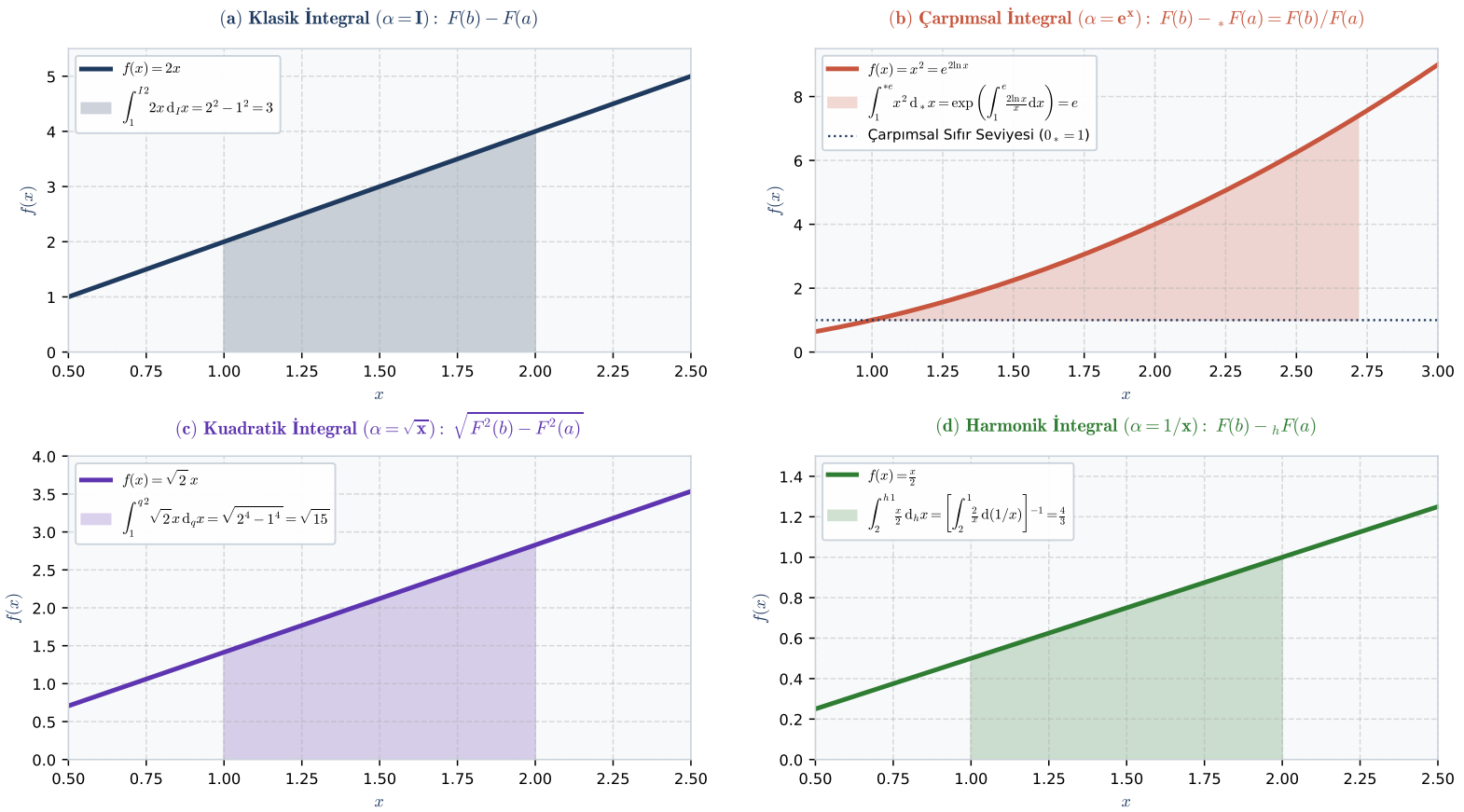
Fonksiyonun **Kareli (RMS) Ortalamasını** üretir.

Önerme 5.41. *(4. Harmonik Üreteç — Harmonik Ortalama)*
$\alpha(x) = 1/x$ için harmonik integral ortalamasıdır:

$$\mu_h(f) = \left(\frac{1}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-1} = f(c).$$

Fonksiyonun **Harmonik Ortalamasını** üretir.

► **Ortalamalar Eşitsizliğinin Analitik Kökeni:** Klasik cebirdeki $\mu_h \le \mu_* \le \mu_I \le \mu_q$ eşitsizliği; tek bir **İntegral α-Ortalama Değer Teoreminin** dört üreteç ($\alpha = 1/x, e^x, x, \sqrt{x}$) altındaki doğal sıralamasından kaynaklanır!



Şekil 5.3. Klasik ($\alpha = I$), çarpımsal ($\alpha = e^x$), kuadratik ($\alpha = \sqrt{x}$) ve harmonik ($\alpha = 1/x$) üreteçler altında α-belirli integral birikim bölgeleri ve Kalkülüsün α-Temel Teoremi ($\int_a^{\alpha b} F^{(\alpha)}(x) \, \mathrm{d}_\alpha x = F(b) -_\alpha F(a)$) sonuçları.

5.16 Kendi $\mathbb{E}_\alpha$ Uzayında Yapısı Tam Korunan Temel Teoremler

$\alpha : \mathbb{R} \to A$ dönüşümü sürekli ve kesin artan bir bijeksiyon olduğunda, $(\mathbb{R}, +, \cdot, <, |\cdot|)$ ile $(A, +_\alpha, \times_\alpha, <_\alpha, |\cdot|_\alpha)$ tam sıralı ve izometrik bir cisim izomorfizması oluşturur. Bu nedenle yalnızca iç işlemler $(+_\alpha, \times_\alpha, 0_\alpha, 1_\alpha)$ cinsinden kurulan tüm analiz teoremleri **kusursuz biçimde korunur**:

1. **Limit ve Yakınsama:** α-Sıkıştırma (Sandviç) Teoremi:
$$g(x) \leq_\alpha f(x) \leq_\alpha h(x) \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to_\alpha a} g(x) = \lim_{x \to_\alpha a} h(x) = L \implies \lim_{x \to_\alpha a} f(x) = L.$$
2. **Süreklilik ve Ekstremum:** α-Ara Değer ($f(c) = 0_\alpha$) ve α-Weierstrass Ekstremum ($[a,b]_\alpha$'da maksimum ve minimuma zorunlu ulaşım) teoremleri.
3. **Türev ve Değişim:** α-Fermat ($f^{(\alpha)}(c) = 0_\alpha$), α-Rolle ve α-Lagrange Ortalama Değer Teoremi:
$$f(b) -_\alpha f(a) = f^{(\alpha)}(c) \times_\alpha (b -_\alpha a).$$
4. **Belirsizlikler ve Seriler:** $0_\alpha / {}_\alpha 0_\alpha$ belirsizlikleri için α-L'Hôpital Kuralı ve α-Taylor serisi açılımı.
5. **İntegral ve Temel Teorem:** Kalkülüsün I. ve II. α-Temel Teoremi, α-Kısmi İntegrasyon ve İntegral α-ODT:
$$\int_a^{\alpha b} F^{(\alpha)}(x)\, \mathrm{d}_\alpha x = F(b) -_\alpha F(a).$$

► **İzomorfik Güvence:** Bu teoremler $\mathbb{E}_\alpha$ uzayının kendi cetveli (d_α) ve iç aritmetiğiyle ifade edildiğinde, klasik analizdeki biçimsel yapılarını ve mantıksal ispat adımlarını birebir korur.

5.17 Aritmetik Değiştiğinde Ortaya Çıkan Kırılma ve Bozulma Durumları

Klasik işlemler $(+,\cdot)$ ile α-işlemleri bir arada kullanıldığında veya üretecin tekillik ve tanım kümesi sınırlarında klasik teoremler **yapısal bozulmalara ve kırılmalara** uğrar:

1. **Klasik Doğrusallığın ve Süperpozisyonun Bozulması:** α-türev ve α-integral klasik toplama $(+)$ altında doğrusal değildir:
$$(f+g)^* \neq f^* + g^*, \qquad \int_a^{*b} (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}_*x \neq \int_a^{*b} f\,\mathrm{d}_*x + \int_a^{*b} g\,\mathrm{d}_*x.$$
Diferansiyel denklemlerde klasik süperpozisyon çöker; yerini α-süperpozisyon $(c_1 \times_\alpha y_1 +_\alpha c_2 \times_\alpha y_2)$ alır.
2. **Sıfır ve Negatiflik Kırılması ($\alpha = e^x$):** Klasikte her yerde pürüzsüz olan $f(x) = x - 1$ fonksiyonu $x \leq 1$ için $\mathbb{R}_* = (0,\infty)$ kümesi dışına çıkar. $x \to 1^+$ iken çarpımsal uzaklık sonsuza gider $(d_*(f(x),1) \to \infty)$; çarpımsal süreklilik, Rolle ve ODT tamamen bozulur!
3. **Üreteç Türevinin Tekilliği ($\alpha'(0) = \infty$, Kuadratik Üreteç):** Klasikte türevlenebilir $f(x) = x+1$ fonksiyonunun kuadratik türevi $x = 0$'da tanımsızdır:
$$f^{(q)}(x) = \sqrt{\frac{f(x)f'(x)}{x}} = \sqrt{\frac{x+1}{x}} \xrightarrow{x\to 0^+} \infty.$$
4. **Kutupsal Kopukluk ($\alpha = 1/x$, Harmonik Üreteç):** $0 \notin \mathbb{R}_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olduğundan $[-1,1]$ aralığında uzay ikiye bölünür; klasik Ara Değer ve Rolle teoremleri 0'ı içeren aralıklarda çalışmaz.

► **Aritmetiksel Uyum İlkesi:** Bir analitik yapının geçerliliğini koruması, teoremin o uzayın doğal iç işlemleriyle $(+_\alpha, \times_\alpha, 0_\alpha, 1_\alpha)$ ifade edilmesine ve üretecin bijektif tanım kümesi sınırları içinde kalınmasına bağlıdır.

6.1 Nevtonyen Olmayan Analiz ve Geometrinin Genel Sentezi

Bu sunum serisinde, Michael Grossman ve Robert Katz'ın (1972) temellerini attığı ve günümüzde diferansiyel geometriye uzanan **Nevtonyen olmayan kalkülüs kuramı**; aritmetik temellerden cebirsel yapılara, geometrik formlardan analiz süreçlerine kadar eksiksiz bir hiyerarşiyle incelenmiştir.

Önerme 6.1. *(1. Aritmetik ve Geometri Bütünlüğü)*
Problemin Doğal Geometrisi: Klasik Kartezyen düzlemde eğri, bükümlü ve karmaşık görünen kuvvet ve üstel yapılar ($y = ex^2$, $\sqrt{4x^2+1}$, $\frac{2x}{2x+1}$); kendi doğal $\mathbb{E}_\alpha$ uzayında **tam birer düz doğrudur**!

Önerme 6.2. *(2. Analiz Süreçleri ve Ortalamalar)*
Teoremlerin Ortak Kökü: Klasik cebirdeki Aritmetik, Geometrik, Kuadratik ve Harmonik ortalamalar; tek bir **Lagrange α-Ortalama Değer Teoreminin** dört farklı üreteç altındaki doğal izdüşümleridir.

- **Aksiyomatik Özgürlük:** Standart toplama ve çarpma tek seçenek değildir; incelenen olgunun karakterine uygun bir α üreteci seçildiğinde matematiksel modeller dramatik biçimde sadeleşir.
- **Teğet Doğrusunun Genellemesi:** Klasik türev eğriye afin doğru teğetini verirken; α-türev eğriye o uzayın doğal kuvvet, hiperbol veya doygunluk teğetini verir.

6.2 Nevtonyen Olmayan Analiz Nasıl ve Ne Zaman Kullanılmalıdır?

Nevtonyen olmayan analiz, klasik analizin yerine geçen bir alternatif değil; **problemin içsel dinamiğine göre optimize edilmiş** daha genel bir üst matematik dilidir. Başarılı bir modelleme için izlenmesi gereken metodolojik adımlar:

Adım 1. **Veri ve Değişim Dinamiğinin Karakterini Teşhis Edin:** İncelenen büyüklük mutlak farklarla mı (Δy), katlanarak göreli oranlarla mı (y_2/y_1), karesel enerji/güç birikimiyle mi (ℓ_2), yoksa paralel iletkenlik/direnç mantığıyla mı değişiyor?

Adım 2. **Doğal Üreteç Fonksiyonunu Belirleyin** ($\alpha : \mathbb{R} \to A$)**:**

- Doğrusal/toplamsal süreçler $\implies$ **Birim Üreteç** $\alpha(x) = x$ (Klasik Analiz)
- Nüfus, faiz, fraktal, allometri $\implies$ **Üstel Üreteç** $\alpha(x) = e^x$ (Çarpımsal Analiz)
- Kinetik enerji, sinyal gücü, varyans $\implies$ **Kuadratik Üreteç** $\alpha(x) = \sqrt{x}$
- Hız-zaman, optik odak, paralel direnç $\implies$ **Harmonik Üreteç** $\alpha(x) = 1/x$

Adım 3. $\mathbb{E}_\alpha$ **Uzayında Modeli Kurun ve Analitik Olarak Çözün:** Karmaşık görünen non-lineer diferansiyel denklemler, α-türev ve α-integral altında **sabit katsayılı doğrusal formlara** dönüşür; çözümler doğrudan kapalı formda elde edilir.

Adım 4. **Geri-Çekme** (α^{-1}) **ile Klasik Fiziksel Yorumu Yapın:** α-dünyasında elde edilen doğrusal sonuçlar, α izomorfizmasıyla klasik reel eksene taşınarak yorumlanır.

► **Altın İlke:** Sistemi zorla klasik toplamsal kalıba sokmak yerine, aritmetiği sistemin doğal diline uyarlayınız!

Önerme 6.3. *(1. Doğrusallaştırma Gücü)*
Non-Lineerliği Doğrusallaştırma: Klasik analizde çözümü çok zor olan kuvvet ve üstel diferansiyel denklemler; $\mathbb{E}_*$ veya $\mathbb{E}_\alpha$ uzayında **birinci derece sabit katsayılı doğrusal denklem** haline gelir.

Önerme 6.4. *(2. Ölçekten Bağımsızlık (Scale-Free))*
Birim Değişimlerine Duyarsızlık: Çarpımsal analizde türev (f^*) ölçüm birimlerinin (metre, kilometre, gram vb.) ölçeklenmesinden etkilenmez; iktisattaki **esneklik (elastikiyet)** kavramını doğrudan modeler.

Önerme 6.5. *(3. Sayısal Kararlılık ve Pozitiflik)*
Kesme Hatasız Hesaplama: Nüfus ve biyoloji modellerinde klasik Runge–Kutta yöntemleri eksiye düşebilirken; çarpımsal Runge–Kutta yöntemleri **pozitifliği mutlak olarak korur** ve sıfıra yaklaşırken kararlıdır.

Önerme 6.6. *(4. İçsel Geometrik Doğallık)*
Eğrilerin Düz Cetveli: Klasik Kartezyen uzayda bükülen eğriler, kendi doğal metriği d_α ile ölçüldüğünde **tam düz doğru, tam simetrik çember ve tam dairesel koni** olarak davranır.

► **Kavramsal Sadeleşme:** Karmaşık logaritmik dönüşümler ve suni koordinat yamaları yerine, doğrudan o yapının cebirsel cismi üzerinde çalışmak matematiksel zarafet sağlar.

Önerme 6.7. *(1. Klasik Doğrusallık Kaybı)*

Süperpozisyonun Bozulması: α-türev ve α-integral klasik toplama $(+)$ altında doğrusal değildir:

$$(f+g)^* \neq f^* + g^*, \qquad \int_a^{*b} (f+g)\,\mathrm{d}_* x \neq \int f + \int g.$$

Klasik Fourier analizi ve süperpozisyon çöker; yerini α-süperpozisyon $(c_1 \times_\alpha y_1 +_\alpha c_2 \times_\alpha y_2)$ alır.

Önerme 6.8. *(2. Tanım Kümesi ve Pozitiflik Kısıtı)*

Sıfır ve Eksi Değer Engeli: Çarpımsal analizde $A = \mathbb{R}_* = (0,\infty)$ olup sıfır veya eksi değer alan fonksiyonlar $(f(x) \leq 0)$ çarpımsal sürekliliğini ve türevini kaybeder; $\ln 0$ tekilliği oluşur.

Önerme 6.9. *(3. Üreteç Türevi Tekillikleri)*

Kritik Nokta Kırılması: Kuadratik üreteçte $\alpha'(0) = \infty$ olduğundan klasikte pürüzsüz olan $f(x) = x+1$, $x = 0$'da kuadratik türevlenemez $(f^{(q)}(0) = \infty)$.

Önerme 6.10. *(4. Alışkanlık ve Literatür Dili)*

Pedagojik Bariyer: Üç asırlık Nevton–Leibniz toplamsal zihin kalıbı nedeniyle, $0_* = 1$ veya $x +_* y = xy$ gibi kavramlar uygulayıcılar için başlangıçta soyut gelebilmektedir.

► **Uygulama Uyarısı:** İncelenen problem mutlak toplamları ve korunum yasalarını $(+)$ içeriyorsa klasik analiz; oranları, büyüme çarpanlarını ve ölçekleri içeriyorsa Nevtonyen olmayan analiz tercih edilmelidir.

6.5 Klasik Analiz ile Nevtonyen Olmayan Analizin Karşılaştırmalı Bilançosu

Değerlendirme Kriteri	**Klasik Analiz ($\alpha = I$)**	**Nevtonyen Olmayan Analiz (α)**
Temel Sayı Kümesi	$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}_\alpha = A \subseteq \mathbb{R}$ (örneğin $\mathbb{R}_* = (0, \infty)$)
Temel İşlem Paradigması	Toplama ($+$) ve Çıkarma ($-$)	α-Toplama ($+_\alpha$) ve α-Çarpma ($\times_\alpha$)
Değişim Ölçütü	Mutlak fark: $\Delta y = y_2 - y_1$	Göreli oran / α-fark: $y_2 -_\alpha y_1$
Doğal Eğri / Doğru	Düz afin doğru: $y = mx + n$	α-Doğru: $y = m \times_\alpha x +_\alpha n$ (kuvvet, hiperbol vb.)
Türev Operatörü	$f'(x) = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$	$f^{(\alpha)}(x) = \alpha\left(\frac{(\alpha^{-1})'(f(x))}{(\alpha^{-1})'(x)} f'(x)\right)$
Ekstremum Şartı	$f'(c) = 0$ (Sıfır eğim)	$f^{(\alpha)}(c) = 0_\alpha$ (Çarpımsalda $f^*(c) = 1$)
İntegral Ortalaması	Aritmetik Ortalama (μ_I)	Aritmetik, Geometrik, Kuadratik, Harmonik
En Güçlü Olduğu Saha	Mekanik, doğrusal devreler, korunumlar	Üstel büyüme, fraktallar, sinyal gücü, biyoloji
Temel Sınırlılığı	Üstel süreçlerde değişken katsayılar	Toplamsal süperpozisyon ve tanım kümesi kısıtı

► **Metodolojik Sonuç:** Her iki kalkülüs ailesi birbirinin zıttı değil; (α, β) üreteç çiftlerinin oluşturduğu sonsuz kalkülüsler uzayının iki temel kardeş üyesidir.